Mathématiques pour les Sciences de la Terre

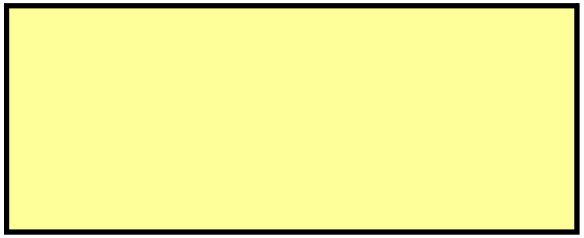
GEOMETRIE
Géométrie d'Euclide
Transformations ponctuelles - Isométries
Géométrie vectorielle

ESPACE VECTORIEL
Structure d'espace vectoriel – Dual - Applications de $\vec{E} \rightarrow \vec{E}$
Algèbre linéaire
Algorithmes (calcul matriciel)

STATISTIQUE
Statistiques descriptives
Probabilités – Principales lois statistiques
Raccordement à une loi statistique – Tests statistiques
Moindres carrés linéaires, linéarisés
Algorithmes (tests statistiques, moindres carrés)

GEOMETRIE D'EUCLIDE (1) : Fondements

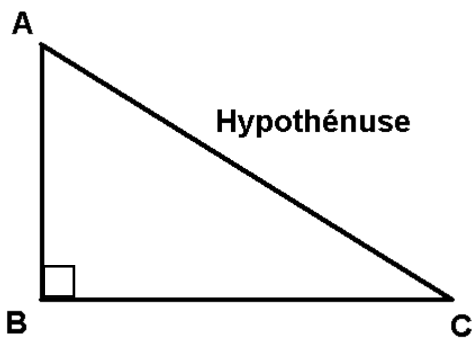
Datation : Antiquité



Plan (aucun point privilégié)
- pas de norme
- pas d'orientation

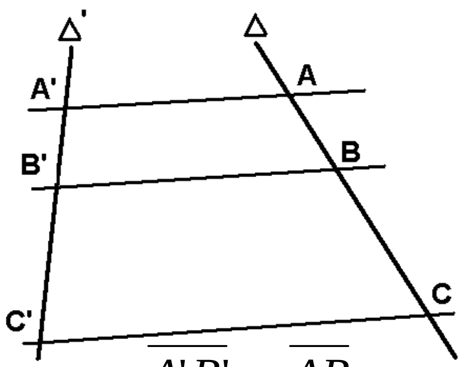
2 Théorèmes fondamentaux :

Pythagore



$AB^2 + BC^2 = AC^2$

Thales

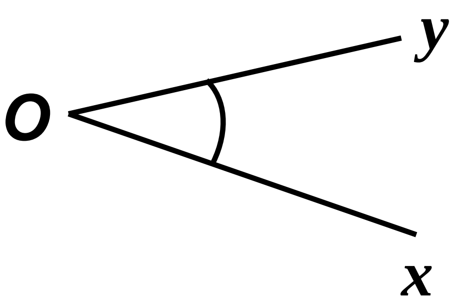


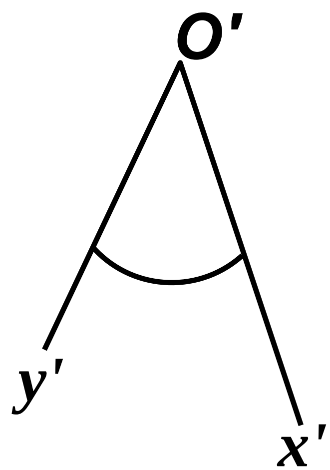
$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

Relations entre longueurs <u>relatives</u>

GEOMETRIE D'EUCLIDE (2) : Définitions des angles non orientés

Demi-droites



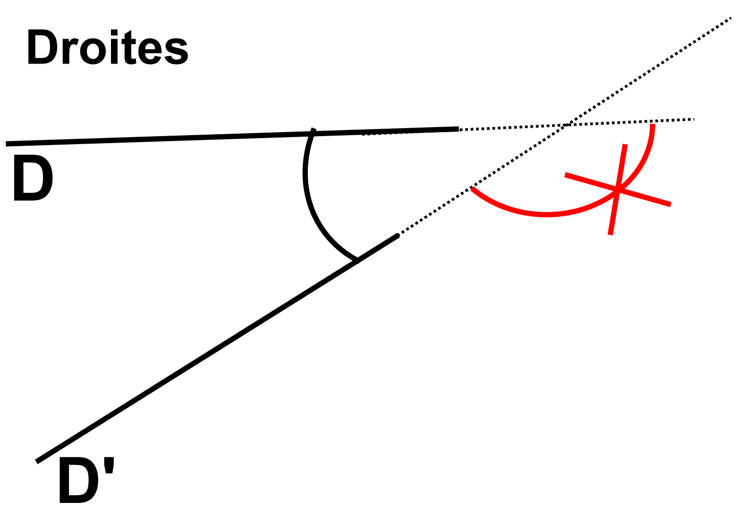


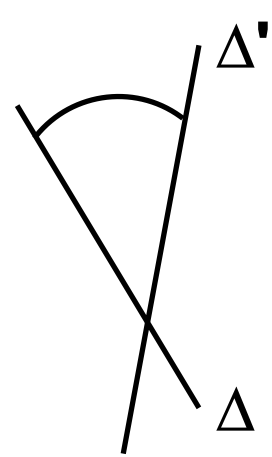
$$\widehat{(Ox, Oy)} = \widehat{(O'x', O'y')}$$
$$= \widehat{(O'y', O'x')}$$

Mesure de l'angle :

$$0 \leq \widehat{(Ox, Oy)} \leq \pi$$

Droites





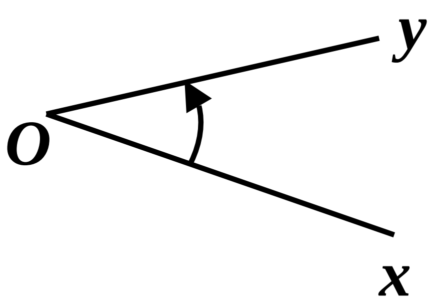
$$\widehat{(D, D')} = \widehat{(\Delta, \Delta')}$$

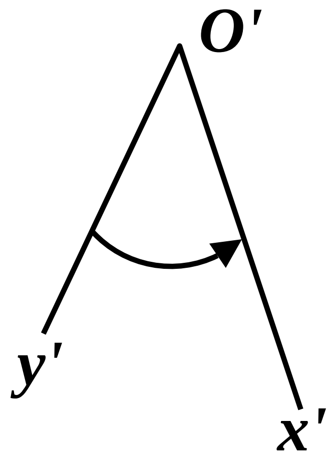
Mesure de l'angle :

$$0 \leq \widehat{(D, D')} \leq \pi/2$$

GEOMETRIE D'EUCLIDE (3) : Définition des angles orientés

Demi-droites





$\widehat{(Ox, Oy)} = \widehat{(O'y', O'x')}$

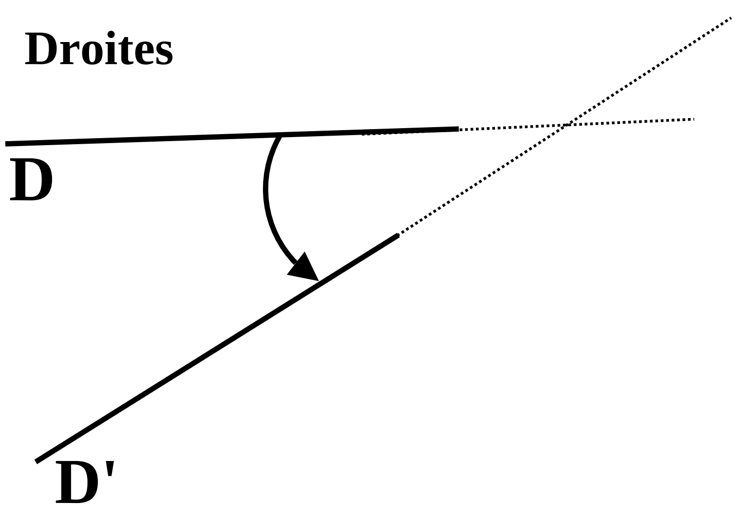
$\widehat{(Ox, Oy)} = \widehat{(O'y', O'x')}$

$= -\widehat{(O'x', O'y')}$

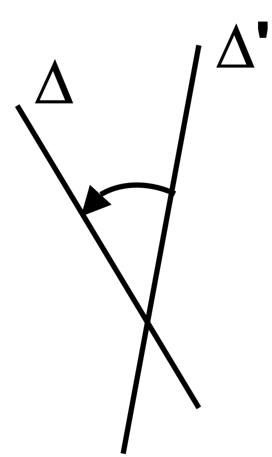
Mesure de l'angle :

$0 \leq \widehat{(Ox, Oy)} < 2\pi$

Droites



droites

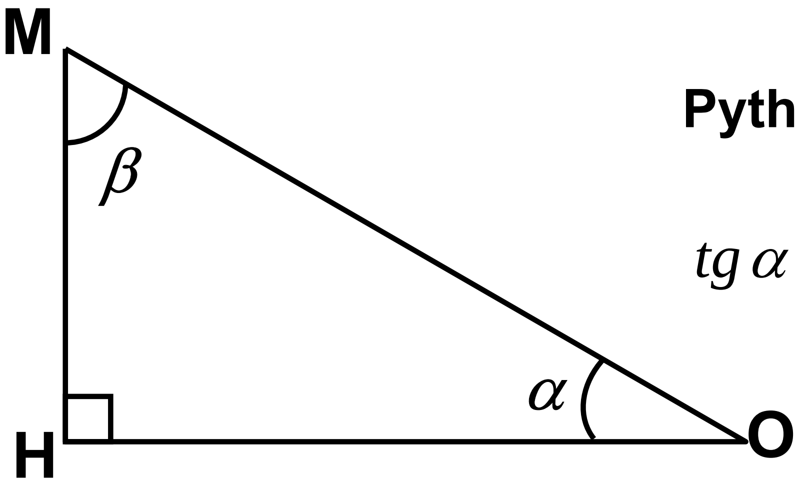


$\widehat{(D, D')} = \widehat{(\Delta', \Delta)}$

Mesure de l'angle :

$0 \leq \widehat{(D, D')} \leq \pi$

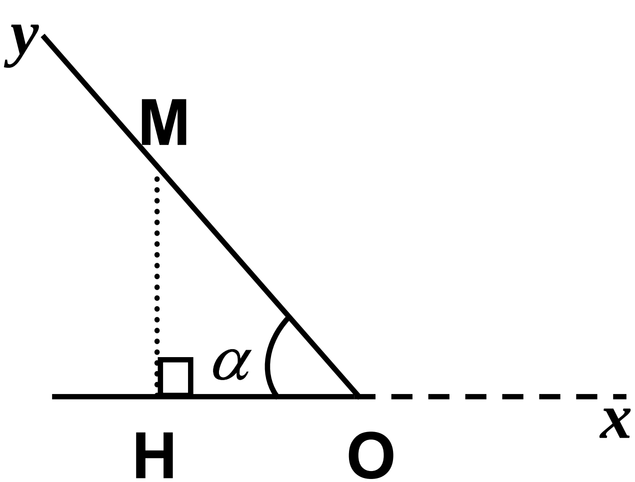
GEOMETRIE D'EUCLIDE (4) : Définition des fonctions circulaires

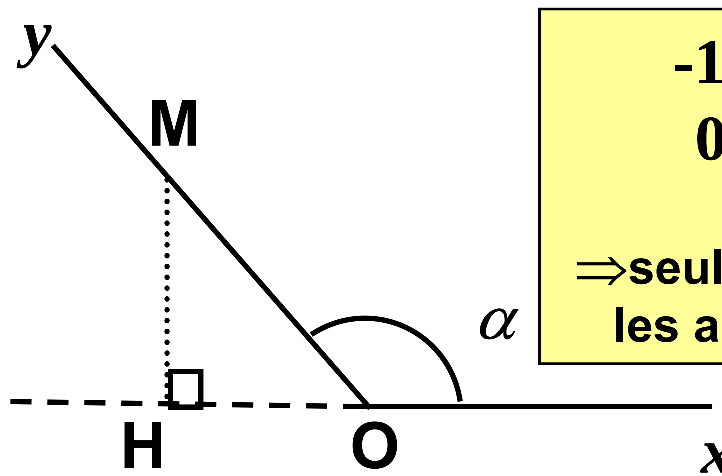


Pythagore ⇨ Angles non orientés aigus

$$tg\,\alpha = \frac{HM}{OH} \qquad \cos\alpha = \frac{OH}{OM} \qquad \sin\alpha = \frac{HM}{OM}$$

Angles non orientés de demi-droites : 0 ≤ α ≤ π

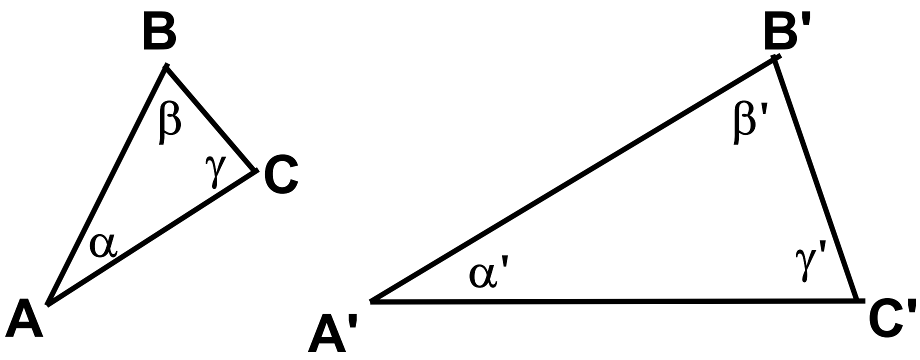




$$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$$
$$0 \leq \sin\alpha \leq 1$$

⇒seul cos α caractérise les angles non orientés

GEOMETRIE D'EUCLIDE : SIMILITUDE



1^{er} cas de similitude :
Si $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$
alors ABC et A'B'C' sont semblables

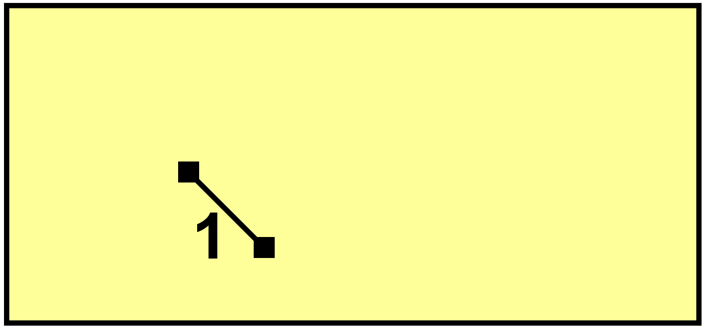
$2^{ème}$ cas de similitude :
Si $\alpha = \alpha'$ et A'B'/AB = A'C'/AC
alors ABC et A'B'C' sont semblables

Définition : ABC et A'B'C' sont semblables
ssi B'C'/BC = A'C'/AC = A'B'/AB
et $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ et $\gamma = \gamma'$

$3^{ème}$ cas de similitude :
Si B'C'/BC= A'B'/AB = A'C'/AC
alors ABC et A'B'C' sont semblables

QUESTION : A-t'on similitude si: $\beta = \beta'$ et A'B'/AB = A'C'/AC ?

GEOMETRIE EUCLIDIENNE (1) : Isométries



<u>Plan Euclidien P</u>

- aucun point privilégié (~~origine~~)
- norme (unité de longueur)
- sans (avec) orientation

<u>Définition</u> : Une isométrie est une bijection de P sur P qui conserve les distances

L'application $t : P \rightarrow P$ est une isométrie ssi t est bijective

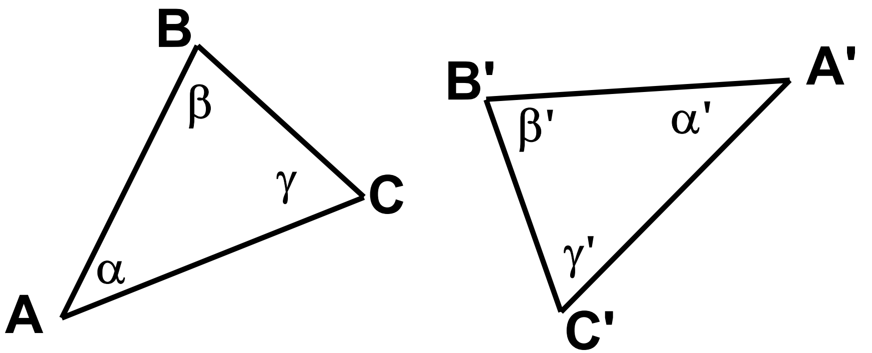
et $\forall\ A \in P,\ \forall\ B \in P, \qquad t(A)\,t(B) = AB$

3ème cas d'égalité des triangles $\Rightarrow$ les isométries conservent les mesures d'angles non orientés de demi-droites

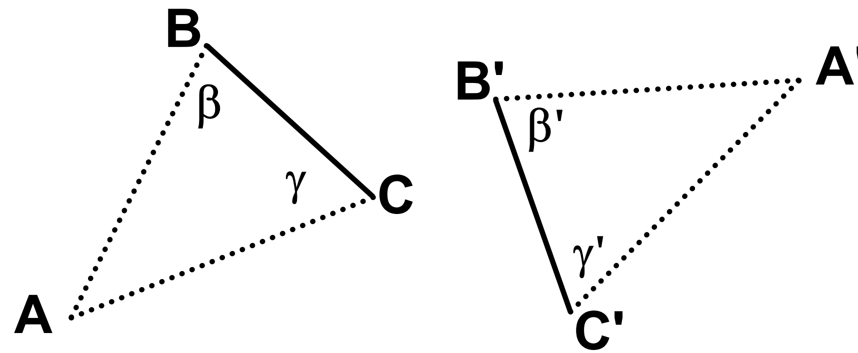
Propriétés :

* Si t est une isométrie, t^{-1} est une isométrie
* Si t et s sont des isométries, $t \circ s$ et $s \circ t$ sont des isométries

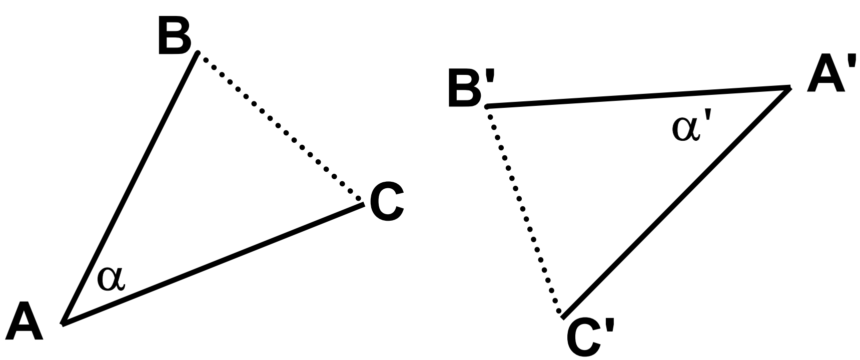
GEOMETRIE EUCLIDIENNE (2) : Règles d'égalité des triangles



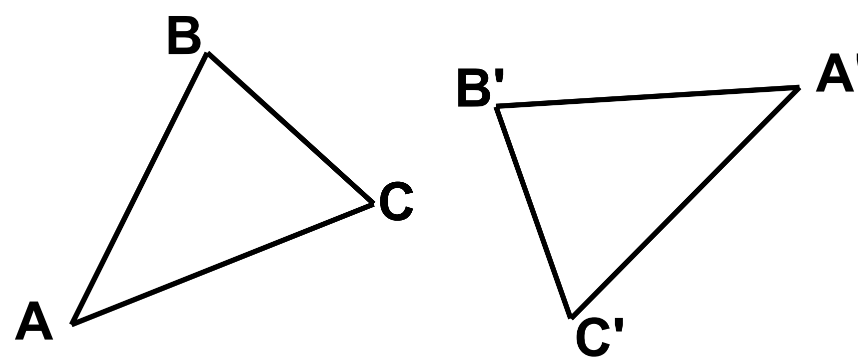
Définition : ABC et A'B'C' sont congrus
ssi : BC = B'C', CA = C'A', AB = A'B'
et $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$



1er cas d'égalité :
Si BC = B'C', $\beta = \beta'$ et $\gamma = \gamma'$
alors ABC et A'B'C' sont congrus



2ème cas d'égalité :
Si AB = A'B', AC = A'C' et $\alpha = \alpha'$
alors ABC et A'B'C' sont congrus



3ème cas d'égalité :
Si AB = A'B', BC = B'C' et AC = A'C'
alors ABC et A'B'C' sont congrus

GEOMETRIE EUCLIDIENNE (3) : Isométries

Dans le plan Euclidien, toute isométrie est d'un des types suivants :

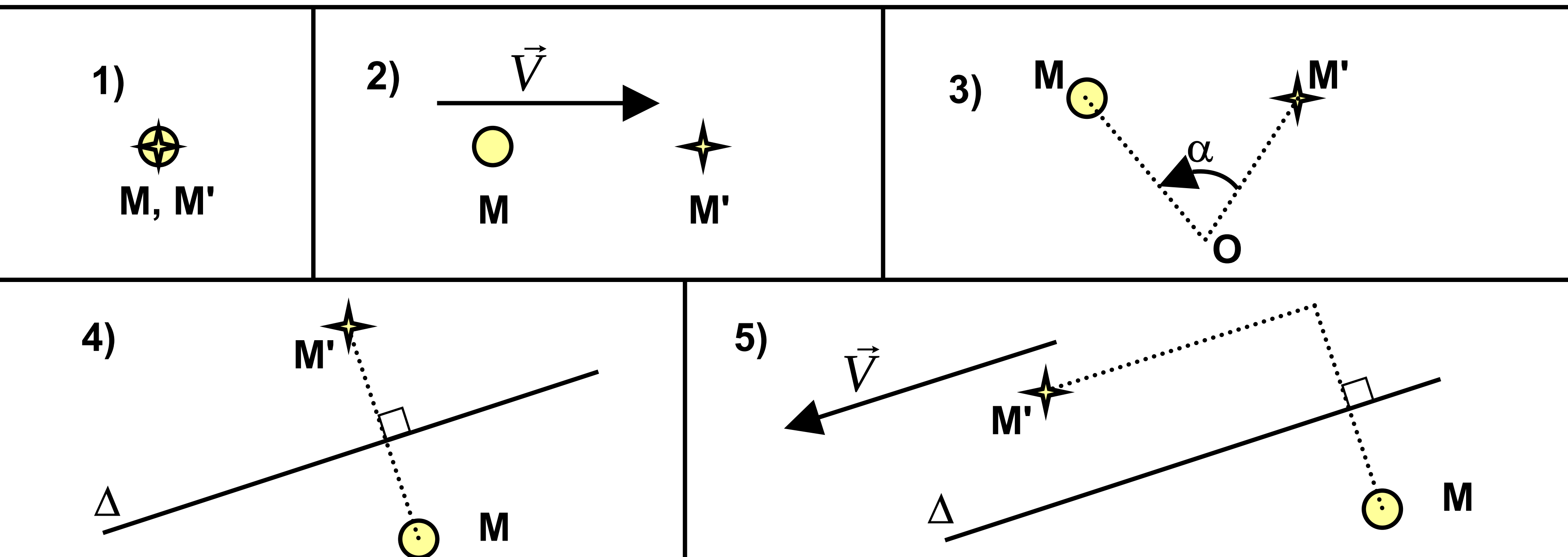
1) Identité I — I : $M \to I(M) = M$.

2) Translation T_v de vecteur $\vec{V}$ — T_v : $M \to M' = T_v(M)$ tq $\overrightarrow{MM'} = \vec{V}$.

3) Rotation (centre O, angle α) — $R_{O,\alpha}$: $M \to M' = R_{O,\alpha}(M)$
tq : $OM' = OM$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha \ (2\pi)$

4) Symétrie orthogonale S_Δ d'axe Δ — S_Δ : $M \to M' = S_\Delta(M)$ tq Δ médiatrice de MM'

5) Glissement $G_{\Delta,V}$ d'axe Δ et de vecteur $\vec{V}$ parallèle à Δ :
$G_{\Delta,V}$: $M \to M' = T_V \circ S_\Delta(M) = S_\Delta \circ T_V(M)$



GEOMETRIE EUCLIDIENNE (4) : Classification des isométries

DEFINITIONS :

Déplacement : Isométrie d conservant les mesures d'angles orientés de demi-droites

$$(\overrightarrow{d(A)\ d(B)}, \overrightarrow{d(A)\ d(C)}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \quad (2\pi).$$

Retournement : Isométrie r changeant les mesures d'angles orientés en leur opposées

$$(\overrightarrow{r(A)\ r(B)}, \overrightarrow{r(A)\ \mathrm{r}(C)}) = -\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \quad (2\pi).$$

Points fixes : Points du plan Euclidien qui sont leur propre image par l'isométrie t

F = point fixe $\Leftrightarrow t(F) = F$

Déplacements		**Rotations**	**Identité**	**Translation**
Retournements	**Symétries orthogonales**			**Glissement**
Points fixes	**?**	**?**	**?**	**?**

GEOMETRIE EUCLIDIENNE (4) : Classification des isométries

DEFINITIONS :

Déplacement : Isométrie d conservant les mesures d'angles orientés de demi-droites
$(\overrightarrow{d(\text{A})\,d(\text{B})}, \overrightarrow{d(\text{A})\,d(\text{C})}) = (\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}})\ \ (2\pi)$.

Retournement : Isométrie r changeant les mesures d'angles orientés en leur opposées
$(\overrightarrow{r(\text{A})\,r(\text{B})}, \overrightarrow{r(\text{A})\,\text{r}(\text{C})}) = -\,(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}})\ \ (2\pi)$.

Points fixes : Points du plan Euclidien qui sont leur propre image par l'isométrie t
F = point fixe $\Leftrightarrow t(\text{F}) = \text{F}$

Déplacements		**Rotations**	**Identité**	**Translation**
Retournements	**Symétries orthogonales**			**Glissement**
Points fixes	**droite Δ**	**centre O**	**plan P**	$\varnothing$

<u>Théorème fondamental</u> : Toute isométrie peut toujours s'exprimer comme la composée d'au plus 3 symétries orthogonales.

STRUCTURE DES ENSEMBLES : GROUPE

Groupe : Soit G un ensemble, e un élément de G et $\star$ une loi de composition interne.

$(G, e, \star)$ est un groupe ssi:

1) la loi $\star$ est associative: $\forall (a, b, c) \in G^3$, $a\star(b\star c) = (a\star b)\star c$
2) la loi admet e comme élément neutre: $\forall a \in G$ $a\star e = e\star a = a$
3) tout élément de G a un inverse: $\forall a \in G, \exists \tilde{a} \in G$ $a\star\tilde{a} = \tilde{a}\star a = e$

Groupe abélien: Soit G un groupe, a et b 2 éléments de G et $\star$ sa loi de composition interne.

Le groupe G est abélien (commutatif) si

4) sa loi interne $\star$ est commutative : $\forall a \in G$ $\forall b \in G$ $a\star = b\star a$

Homomorphisme: Soient $(G, e, \star)$ et $(G', e', \star')$ 2 groupes et $f : G \to G'$. f est un homomorphisme si :

(Morphisme de Groupe :)

1) $\forall a \in G, \forall b \in G,$ $f(a\star b) = f(a)\star' f(b)$
2) $\forall a \in G, \forall b \in G,$ $f(e) = e'$
3) $\forall a \in G,$ $f(\tilde{a}) = \widetilde{f(a)}$

Propriété : Si f est bijectif, son inverse f^{-1} est aussi un morphisme de groupe

---

Isomorphisme: Soient $(G, e, \star)$ et $(G', e', \star')$ 2 groupes et $f : G \to G'$. f est un isomorphisme ssi f^{-1} est un morphisme bijectif. f est alors aussi un morphisme bijectif.

Sous-groupe: Soit $(G, e, \star)$ un groupe et H un sous-groupe de G. $(H, e, \star)$ est un sous-groupe de G ssi

1) $\forall a \in H, \forall b \in H,$ $a\star b \in H$ (stabilité par rapport à $\star$)
2) $e \in H$
3) $\forall a \in H,$ $\tilde{a} \in H$ (stabilité par rapport à l'inversion)

Cardinal : Un groupe G est dit "fini" ssi l'ensemble G a un nombre fini d'éléments.

On appelle "ordre" d'un groupe fini G le nombre d'éléments de G : ordre de G = Card G.

GEOMETRIE EUCLIDIENNE (4) : Groupe des isométries

Idée : Montrer <u>graphiquement</u> que la composé (f o g) de 2 isométries f et g est une isométrie ($f, g = I, T_v, R_{O,\alpha}, S_\Delta$ et $G_{\Delta,V}$).

EXEMPLE : $f = R_{O,\, -60°}$, $g = R_{O',\, -30°}$

1) Représenter l'action de (f o g) sur un bipoint (A, B)
avec f o g (A, B) = f (g (A, B))

f o g : (A, B)$\rightarrow$ (A'', B'') et vérifier si (A''B'') = (AB) (isométrie)

2) Deviner la nature de f o g à partir de quelques bipoints objets-images.

3) Etablir la table de multiplication des isométries.

4) Exemple 6/m (3D) : Cardinal, Sous-groupe, Abélien (A Faire)

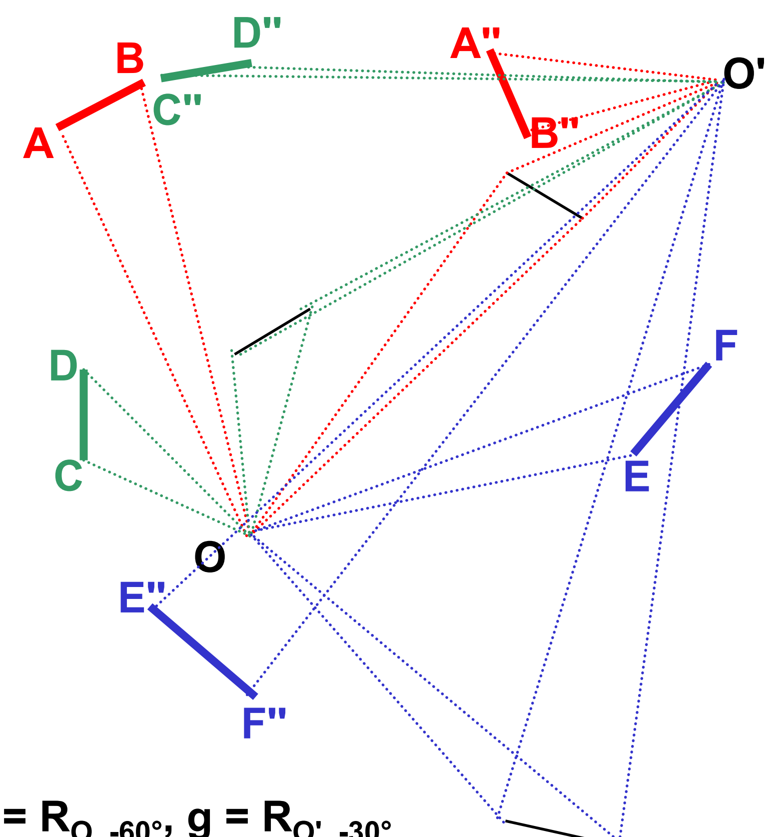
GEOMETRIE EUCLIDIENNE (4) : Groupe des isométries

Idée : Montrer <u>graphiquement</u> que la composé (f o g) de 2 isométries f et g est une isométrie
(f, g = I, T_v, $R_{O,\alpha}$, S_Δ et $G_{\Delta,V}$).

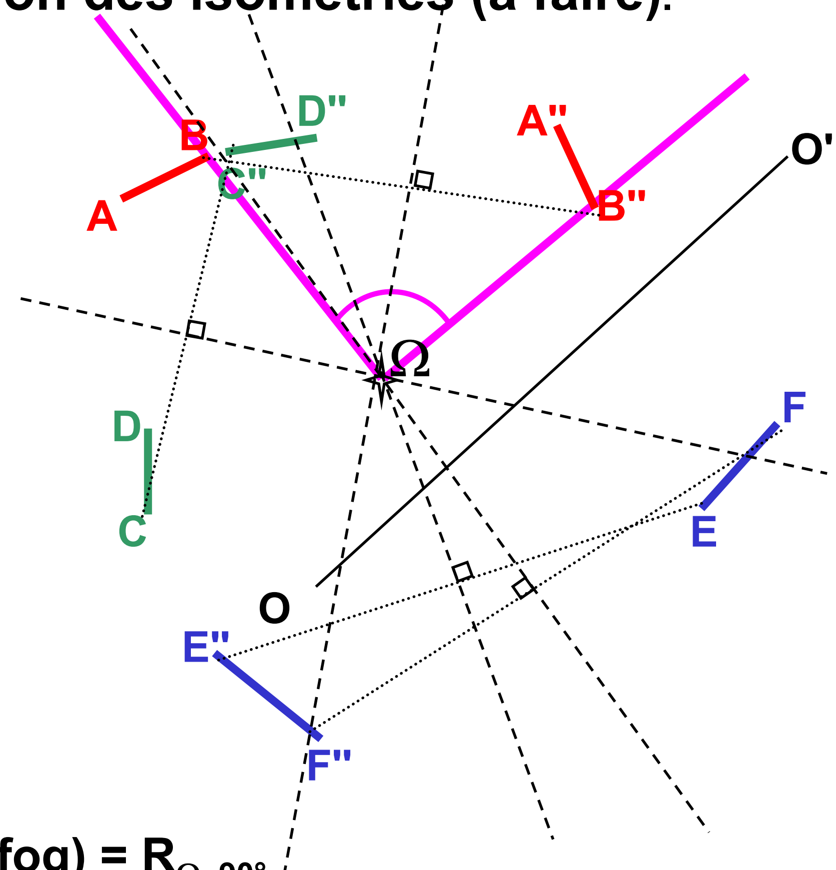
1) Représenter l'action de (f o g) sur un bipoint (A, B) avec f o g (A, B) = f (g (A, B))
f o g : (A, B)→ (A", B")   Vérifier si (A"B") = (AB) (isométrie)

2) Deviner la nature de f o g à partir de quelques bipoints objets-images.

3) Etablir la table de multiplication des isométries (à faire).

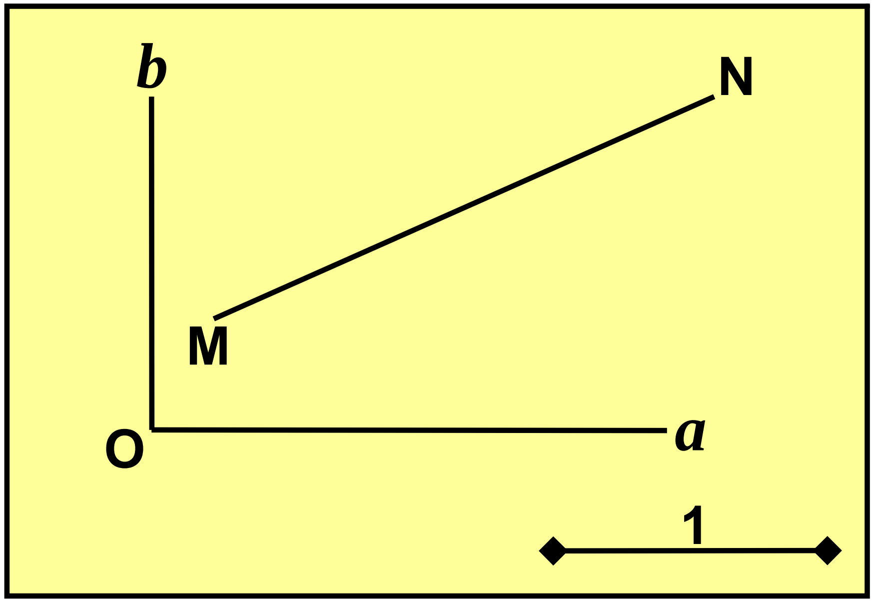


$f = R_{O, -60°}$, $g = R_{O', -30°}$



$(fog) = R_{\Omega, 90°}$

GEOMETRIE EUCLIDIENNE : PLAN MUNI D'UNE METRIQUE

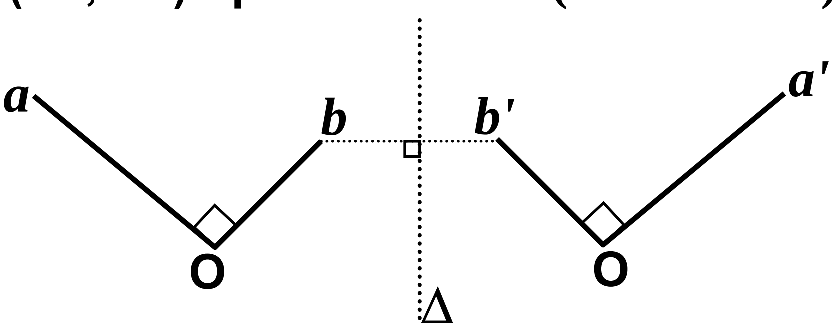


Plan + métrique, non orienté

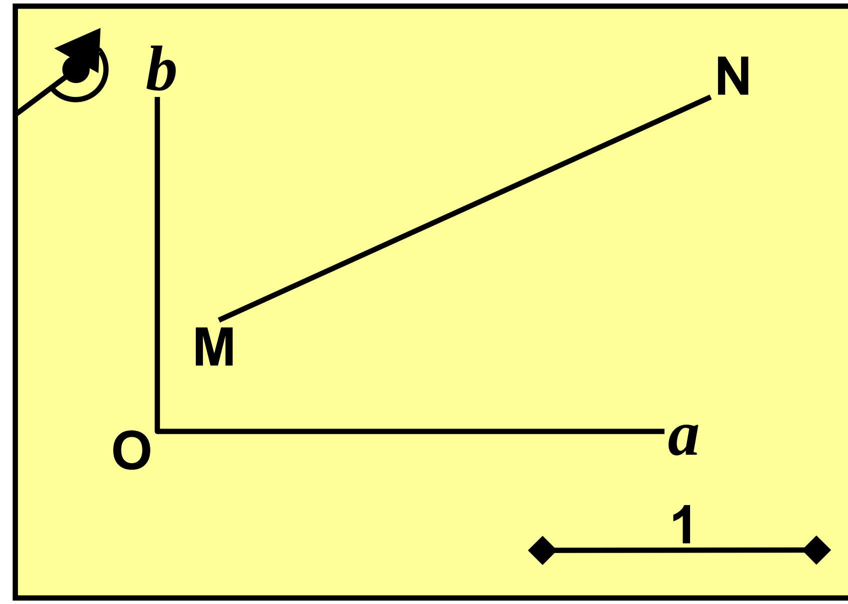
MN = 2

(Oa, Ob) = $\pi/2$

($\vec{Oa}$, $\vec{Ob}$) : pas de valeur (+$\pi/2$ ou $-\pi/2$)



INVARIANT PAR ISOMETRIE

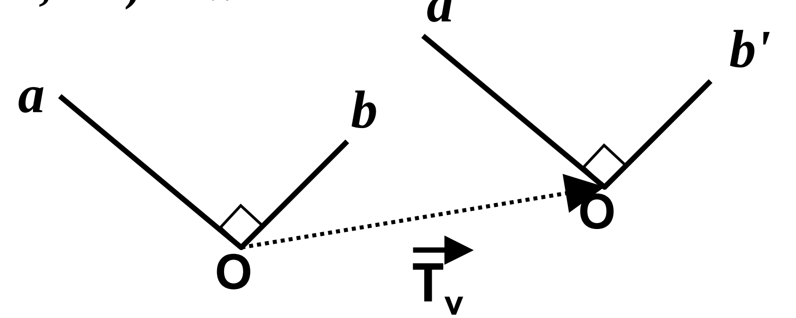


Plan + métrique, orienté

MN = 2

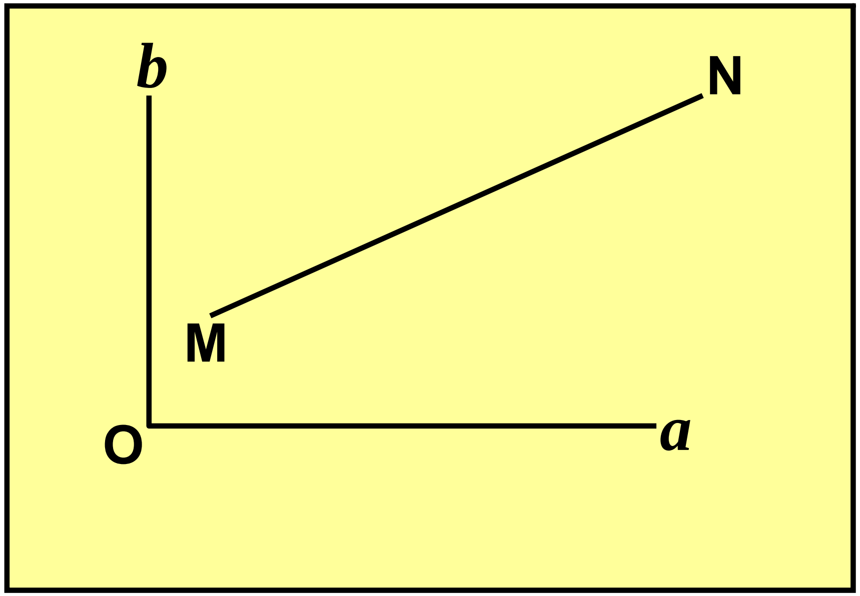
(Oa, Ob) = $\pi/2$

($\vec{Oa}$, $\vec{Ob}$) : +$\pi/2$



INVARIANT PAR TRANSLATION

GEOMETRIE D'EUCLIDE : PLAN NON MUNI D'UNE METRIQUE

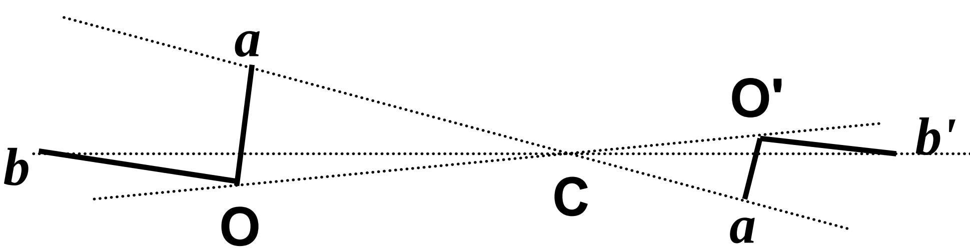


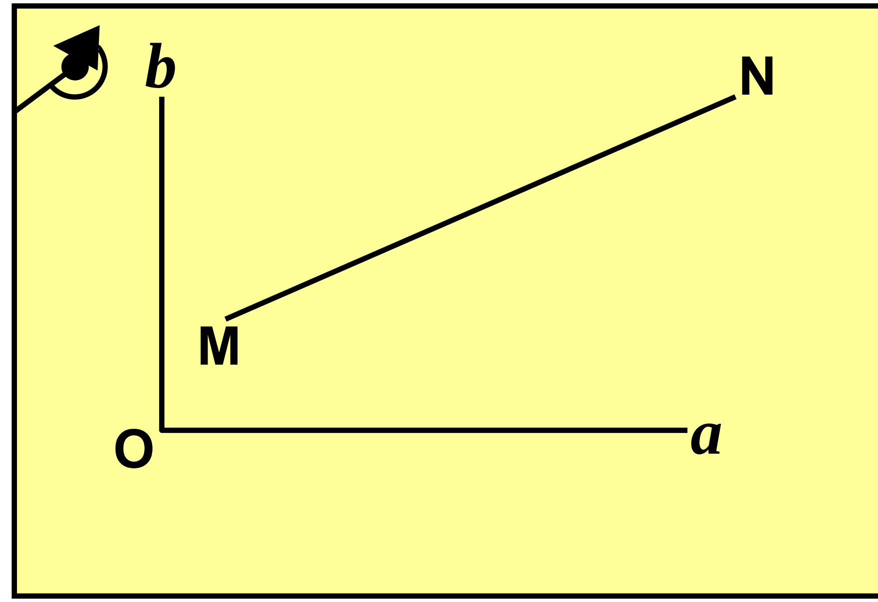
Plan non normé, non orienté

MN : pas de valeur (MN ≥0)

$(Oa, Ob) = \pi/2$

$(\overrightarrow{Oa}, \overrightarrow{Ob})$: pas de valeur ($+\pi/2$ ou $-\pi/2$)



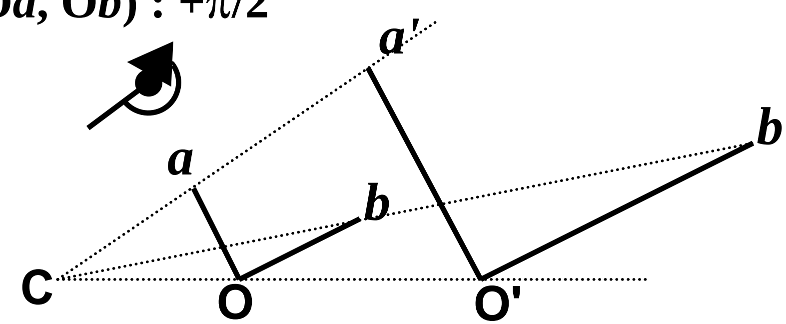


Plan sans métrique, orienté

MN : pas de valeur (MN ≥0)

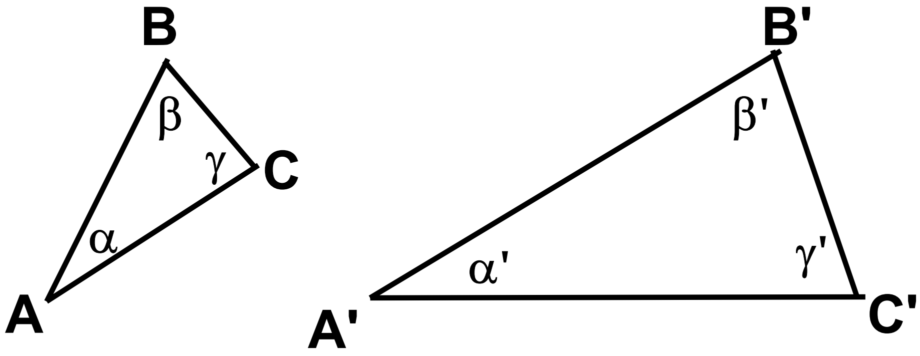
$(Oa, Ob) = \pi/2$

$(\overrightarrow{Oa}, \overrightarrow{Ob})$: $+\pi/2$



INVARIANCE PAR LES SIMILITUDES

GEOMETRIE D'EUCLIDE : SIMILITUDE



1^er cas de similitude :
Si $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$
alors ABC et A'B'C' sont semblables

2^ème cas de similitude :
Si $\alpha = \alpha'$ et A'B'/AB = A'C'/AC
alors ABC et A'B'C' sont semblables

Définition : ABC et A'B'C' sont semblables
ssi B'C'/BC = A'C'/AC = A'B'/AB
et $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ et $\gamma = \gamma'$

3^ème cas de similitude :
Si B'C'/BC= A'B'/AB = A'C'/AC
alors ABC et A'B'C' sont semblables

Définition : **Soit λ un réel strictement positif ($\lambda \in \Re_+^*$)**
On appelle "similitude" de rapport λ toute bijection de P sur lui-même qui multiplie les longueurs par λ .

S : P $\rightarrow$ P est une similitude de rapport λ ssi S est bijective et vérifie pour tous points A et B de P :

$$S(A)\,S(B) = \lambda\, AB$$

GEOMETRIE D'EUCLIDE : SIMILITUDES REMARQUABLES

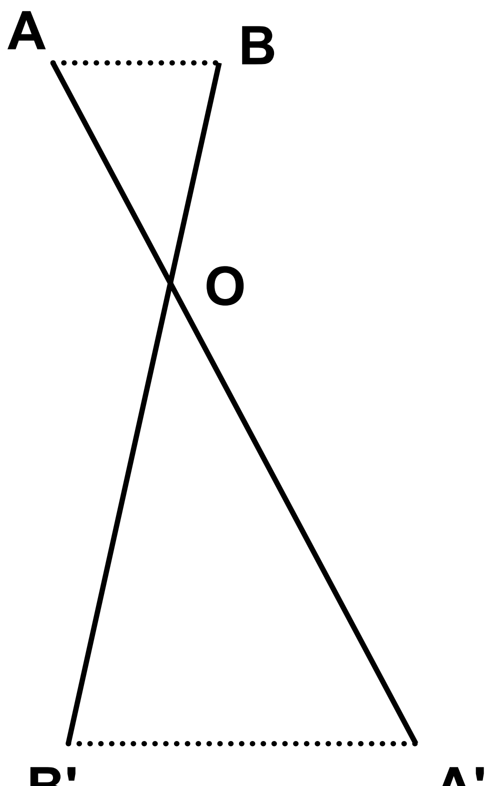
Similitude de rapport λ : $S : P \rightarrow P$ tq. $S(A)\, S(B) = \lambda\, AB$

Isométries : Similitude de rapport $\lambda = 1$

Homothéties: Soit $\mu \in \Re^*$ et $O \in P$.

On appelle "Homothétie de centre O et de rapport μ" la bijection de P sur lui-même telle que :

$$\mathrm{Hom}(O,\mu) : \quad P \rightarrow P, \quad M \rightarrow M' \quad \text{tq.} \quad \overrightarrow{OM'} = \mu\, \overrightarrow{OM}$$



Si $\mu > 0 \Rightarrow$ Homothétie positive

Si $\mu < 0 \Rightarrow$ Homothétie négative

Si $\mu = 1 \Rightarrow$ Identité

Si $\mu = -1 \Rightarrow$ Rotation de centre O, angle π : $R(O, \pi)$

= Symétrie centrale de centre O

Similitude directe : conserve les angles orientés

Similitude inverse : change l'orientation des angles

GEOMETRIE D'EUCLIDE : DECOMPOSITION CANONIQUE DES SIMILITUDES

Théorème :
Une <u>similitude directe</u> est soit un déplacement (isométrie directe), soit une homothétie, soit la composé d'une homothétie d'une homothétie et d'une rotation de même sens.

Une <u>similitude inverse</u> est soit un retournement (isométrie inverse), soit la composé d'une homothétie et d'une symétrie orthogonale dont l'axe passe par le centre de l'homothétie.

⇨ CRISTALLOGRAPHIE :

IL EXISTE DES OPERATEURS DE SYMETRIE PROPRES ET IMPROPRES

QUESTION : **L'espace tridimensionnel considéré en Cristallographie classique suit-il la géométrie d'Euclide ou la géométrie Euclidienne (Est-il normé, orienté ?) ?**
Quelle invariance considère-t'on ?

CARTOGRAPHIE :

QUESTION : **Quelles sont les caractéristiques de l'espace sur lequel on représente les objets géologiques ?**

GEOMETRIES ET INVARIANCES : Le programme d'Erlangen de Klein

Félix Klein (1872) : **Il existe DES géométries; chaque géométrie est caractérisée par son groupe de transformations laissant invariantes les propriétés du plan**

Géométrie Euclidienne :	**Isométrie**	$P \to P$	$t : t(A)\, t(B) = AB$
	Translation	$P_{orient} \to P_{orient}$	$t : \overrightarrow{t(A)\, t(B)} = \overrightarrow{AB}$

Géométrie d'Euclide :	**Homothétie**	$P \to P$	$S : S(A)\, S(B) = \lambda\, AB$
Géométrie conforme :	**Inversion**	$P\text{-}O \to P\text{-}O$	$\Gamma : M \to M' \quad \overrightarrow{OM'} = a^2 \dfrac{\overrightarrow{OM}}{OM^2}$
	⇨ **Aéronautique**		
Géométrie projective :	**Birapport**	$P \to P$	$J : (A,B,C,D) \to (A'\,B'\,C'\,D')$ $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \cdot \dfrac{\overline{DB}}{\overline{DA}} = \dfrac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}} \cdot \dfrac{\overline{D'B'}}{\overline{D'A'}}$
	⇨ **Dessin "en perspective"**		

. . .

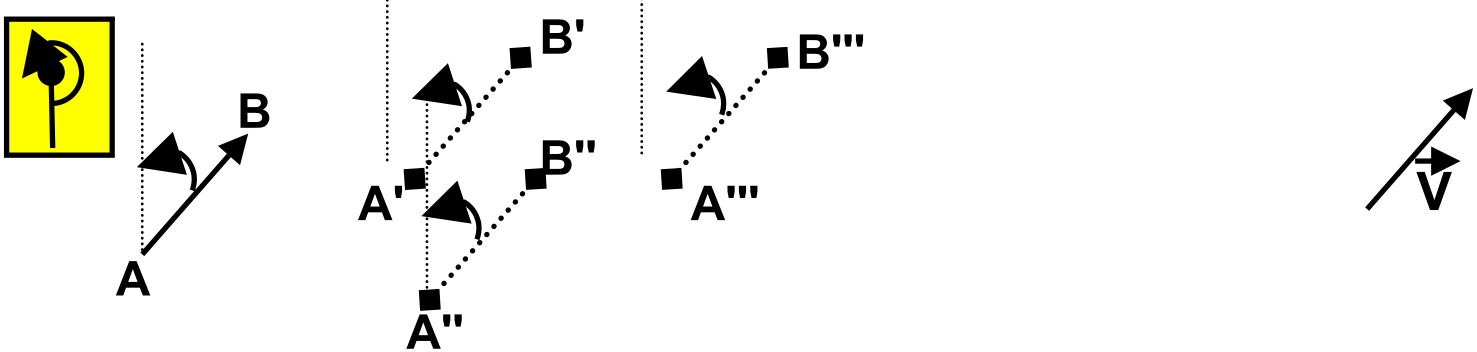
GEOMETRIE VECTORIELLE : DEFINITIONS

Géométrie vectorielle : Décrire différement la géométrie Euclidienne dans un <u>plan orienté</u>.
Etudier les propriétés de ses invariants (translations).

E : Ensemble des points du plan (espace) Euclidien

$\vec{E}$: Ensemble des vecteurs du plan (espace) vectoriel

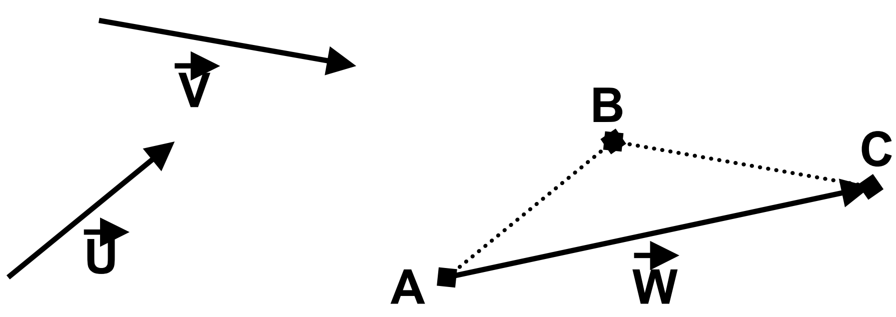
$\vec{\square}$: Application de E X E $\rightarrow$ $\vec{E}$ associant à tout couple de points (A, B) équivalents dans le plan E orienté un unique vecteur $\vec{AB}$ (translation)

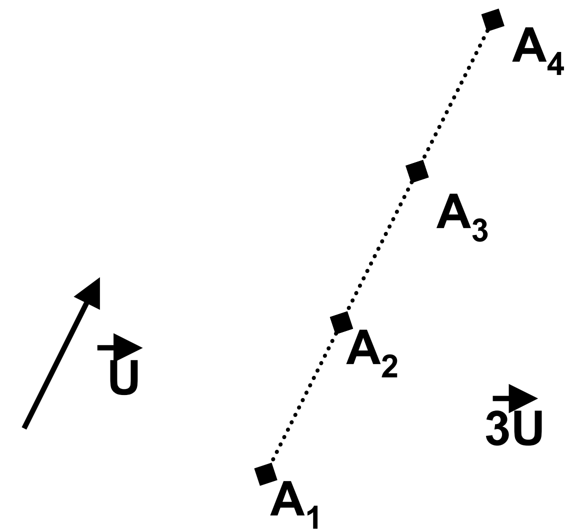


Vecteur (vecteur libre) : Classe d'équivalence de bipoints
(E: pas d'origine O)
= {bipoints équivalents dans le plan Euclidien orienté}
= {bipoints équivalents par translation }
Propriétés non locales : poids $\vec{P}$, champ magnétique $\vec{B}$,

~~**Vecteur lié : Vecteur libre + son support**~~
~~**Propriétés locales : pendage d'une couche, ...**~~

GEOMETRIE VECTORIELLE : PROPRIETES FONDAMENTALES





COMPOSITION D'ISOMÉTRIES

ADDITION DE VECTEURS

$\vec{U}$: E X E $\rightarrow \vec{E}$ A : T_U (A) = B

$\vec{V}$: E X E $\rightarrow \vec{E}$ B : T_V (B) = C

$\overrightarrow{U+V}$: E X E $\rightarrow \vec{E}$ A : $T_V(T_U$ (A)) = C

"Relation de Chasles"

MULTIPLICATION PAR UN REEL λ

$\vec{U}$: E X E $\rightarrow \vec{E}$ A_1 : T_U (A_1) = A_2

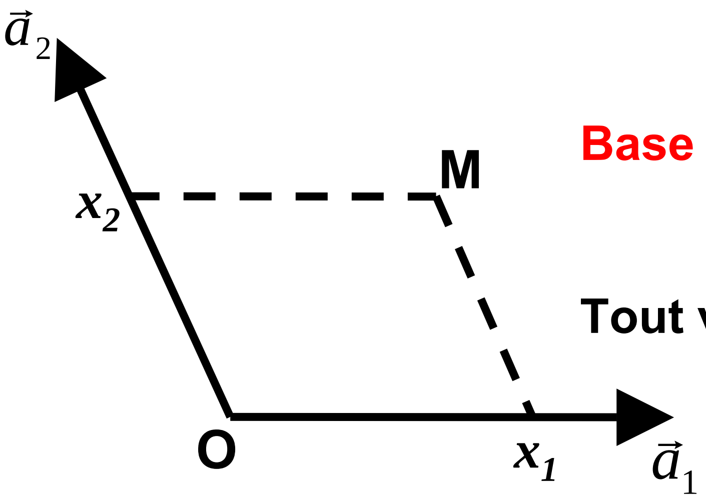
E X E $\rightarrow \vec{E}$ A_2 : T_U (A_2) = A_3

E X E $\rightarrow \vec{E}$ $A_{\lambda-1}$: Tu($A_{\lambda-1}$) = A_λ

$\lambda\vec{U}$: E X E $\rightarrow \vec{E}$ A_1 : $T_u^{\lambda}(A_1) = A_{\lambda+1}$

⇨ **Définition d'un espace vectoriel au sens large**

GEOMETRIE VECTORIELLE : Base de $\vec{E}$, coordonnées d'un vecteur

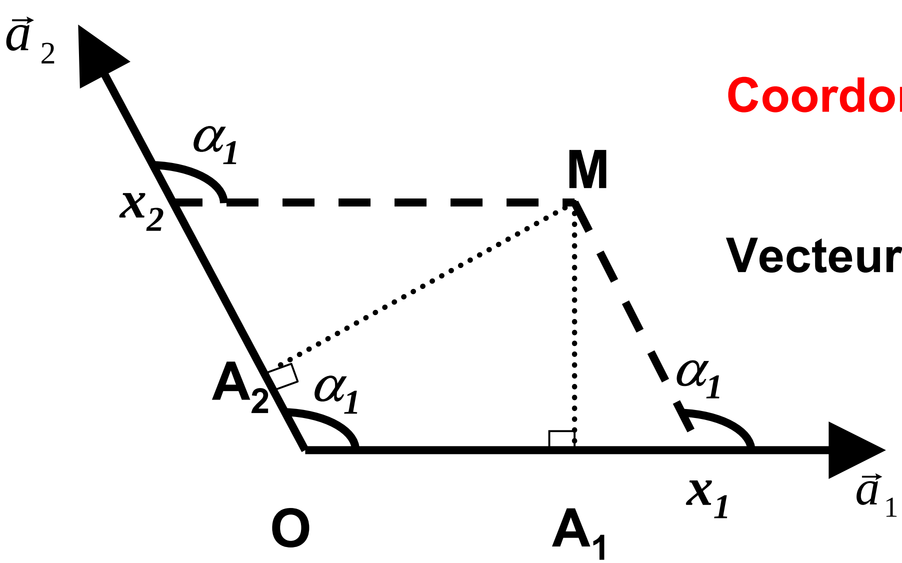


Base de $\vec{E}$: tout ensemble de 2 vecteurs non colinéaires

$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$

Tout vecteur $\overrightarrow{OM}$ de $\vec{E}$ se décompose de façon unique :

$$\overrightarrow{OM} = x_1\ \vec{a}_1 + x_2\ \vec{a}_2$$



Coordonnée x_j : projection de M perpendiculairement à tous les vecteurs $\overrightarrow{MA_j}$ (j ≠ i)

Vecteur $\overrightarrow{MA_j}$: Vecteur perpendiculaire aux vecteurs de base $\vec{a}_i$ (i ≠ j)

⇨ **base du "DUAL" de l'espace vectoriel $\vec{E}$**
⇨ **Vecteurs $\vec{a}_i^*$ en Cristallographie**
⇨ **Vecteur d'onde $\vec{k}$**

GEOMETRIE VECTORIELLE : NOTATION DES VECTEURS

Notation "bipoint" : $\overrightarrow{AB}$, $A\widetilde{B}$, $\underset{\sim}{AB}$
vecteur = bipoint

* Indépendante du choix de la base
* Direction et sens facilement visualisables
* Illustre bien les vecteurs liés
* Addition facile (relation de Chasles)
* Notation concise
* Multiplication par un scalaire peu claire
* Calcul sur schéma (~~Informatique~~)

Notation "translation" : $\vec{V}$, $\tilde{V}$, $\underset{\sim}{V}$, $\mathbf{V}$
vecteur = transformation de $\tilde{E}$

* Indépendante du choix de la base
* Illustre bien les vecteurs libres
* Multiplication par un scalaire claire
* Addition peu visualisable
* Notation très concise
* Direction et sens peu visualisables
* Calcul sur schéma (~~Informatique~~)

Notation "coordonnées" : [x1, x2> (Dirac)
vecteur = résultat d'une décomposition

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ (colonne)

* Addition facile
* Multiplication par un scalaire facile
* Calcul algébrique possible (⇨Informatique)
* Direction et sens peu visualisable
* Dépend intrinséquement de la base
* Notation lourde (en particulier à N dimensions)

GEOMETRIE VECTORIELLE : NORME, PRODUIT SCALAIRE ET VECTORIEL

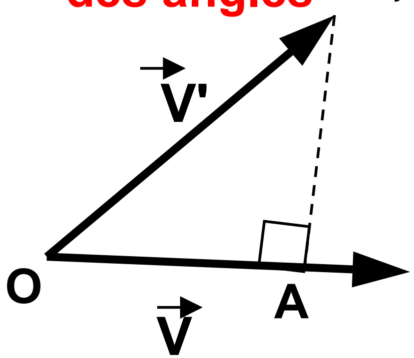
DEFINITIONS :

Isométrie ⇒ **Norme** $\|\overrightarrow{AB}\|$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$

Définition : $\|\overrightarrow{AB}\|$ est un scalaire, défini positif ou nul

⇨ Déf. générale d'une norme (cf. Espace Vectoriel)

Conservation des angles ⇒ **Produit scalaire** de $\vec{V}$ et $\vec{V'}$: $\vec{V} \cdot \vec{V'} = \|\vec{V}\| \cdot \|\vec{V'}\| \cos(\vec{V}, \vec{V'})$



Propriétés : Symétrie $\vec{V} \cdot \vec{V'} = \vec{V'} \cdot \vec{V}$

Bilinéarité $(\vec{U}+\vec{V}).\vec{W} = \vec{U}.\vec{W} + \vec{V}.\vec{W}$

$(\lambda \vec{U}).\vec{V} = \lambda \vec{U}.\vec{V}$

$\vec{W}.(\vec{U}+\vec{V}) = \vec{W}.\vec{U} + \vec{W}.\vec{V}$

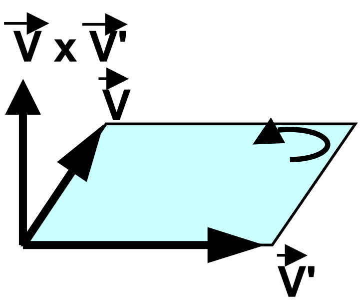
$\vec{V}.(\lambda \vec{U}) = \lambda \vec{V}.\vec{U}$

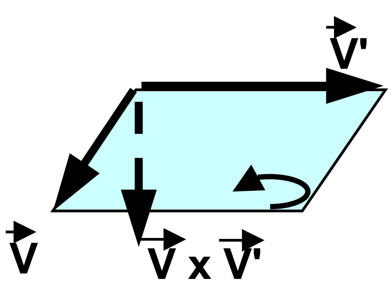
Carré scalaire de $\vec{V}$: $V^2 = \vec{V}.\vec{V} = \|\vec{V}\|^2$

Produit vectoriel de $\vec{V}$ et $\vec{V'}$: $\vec{V} \times \vec{V'} = \|\vec{V}\| \, \|\vec{V'}\| \sin(\vec{V}, \vec{V'})$

Propriété : Aire algébrique du parallélogramme basé sur $\vec{V}$, $\vec{V'}$

$(\vec{V} \times \vec{V'}) \perp \vec{V}$ et $(\vec{V} \times \vec{V'}) \perp \vec{V'}$





GEOMETRIE VECTORIELLE 2D: NORME, PRODUIT SCALAIRE ET VECTORIEL

Expression dans une base bidimensionnelle $(\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ **quelconque où** $\vec{V}_1 = x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j}$
$\vec{V}_2 = x_2\,\vec{i} + y_2\,\vec{j}$

Produit scalaire :

$$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = \left(x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j}\right).\left(x_2\,\vec{i} + y_2\,\vec{j}\right)$$

$$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = x_1x_2\,\vec{i}.\vec{i} + x_1y_2\,\vec{i}\,\vec{j} + y_1x_2\,\vec{j}.\vec{i} + y_1y_2\,\vec{j}.\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{V}_1.\vec{V}_2 = x_1x_2\left\|\vec{i}\right\|^2 + y_1y_2\left\|\vec{j}\right\|^2 + \left(x_1y_2 + y_1x_2\right)\vec{i}.\vec{j}}$$

Norme de $\vec{V}_1$ **:**

$$\left\|\vec{V}_1\right\| = \sqrt{\vec{V}_1.\vec{V}_1} \qquad \boxed{\left\|\vec{V}_1\right\| = \sqrt{x_1^{\,2}\left\|\vec{i}\right\|^2 + y_1^{\,2}\left\|\vec{j}\right\|^2 + 2x_1y_1\,\vec{i}.\vec{j}}}$$

Aire algébrique :

$$\vec{A} = \left(x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j}\right)\wedge\left(x_2\,\vec{i} + y_2\,\vec{j}\right)$$

$$\vec{A} = x_1x_2\,\vec{i}\wedge\vec{i} + x_1y_2\,\vec{i}\wedge\vec{j} + y_1x_2\,\vec{j}\wedge\vec{i} + y_1y_2\,\vec{j}\wedge\vec{j}$$

$$\vec{A} = x_1y_2\,\vec{i}\wedge\vec{j} + y_1x_2\,\vec{j}\wedge\vec{i} \qquad \boxed{\vec{A} = \left(x_1y_2 - y_1x_2\right)\vec{i}\wedge\vec{j}}$$

Déterminant :

$$Det_{(\vec{i}\,,\vec{j}\,)}\left(\vec{V}_1,\vec{V}_2\right) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \qquad Det_{(\vec{i}\,,\vec{j}\,)}\left(\vec{V}_1,\vec{V}_2\right) = x_1y_2 - x_2y_1$$

l'aire algébrique vaut : $\vec{A} = Det_{(\vec{i}\,,\vec{j}\,)}\left(\vec{V}_1,\vec{V}_2\right)\times\left(\vec{i}\wedge\vec{j}\,\right)$

aire du parallélogramme construit sur $\left(\vec{V}_1,\vec{V}_2\right)$
$\Rightarrow$ indépendant de la base

fonction des coordonnées
$\Rightarrow$ dépendant de la base

aire du parallélogramme construit sur $(\vec{i}\,,\vec{j}\,)$
$\Rightarrow$ dépendant de la base

GEOMETRIE VECTORIELLE 3D: NORME, PRODUIT SCALAIRE, VECTORIEL ET MIXTE

Expression dans une base bidimensionnelle $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ **quelconque où**
$$\vec{V}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$
$$\vec{V}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

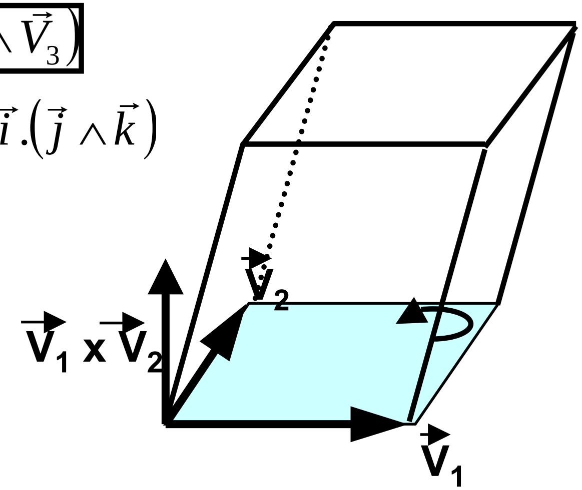
Produit scalaire :
$$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right).\left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right)$$
$$\boxed{\begin{aligned}\vec{V}_1.\vec{V}_2 &= x_1x_2\left\|\vec{i}\right\|^2 + y_1y_2\left\|\vec{j}\right\|^2 + z_1z_2\left\|\vec{k}\right\|^2 \\ &\quad + \left(x_1y_2 + y_1x_2\right)\vec{i}.\vec{j} + \left(x_1z_2 + z_1x_2\right)\vec{i}.\vec{k} + \left(z_1y_2 + z_1x_2\right)\vec{k}.\vec{j}\end{aligned}}$$

Norme de $\vec{V}_1$ **:**
$$\left\|\vec{V}_1\right\| = \sqrt{x_1^{\ 2}\left\|\vec{i}\right\|^2 + y_1^{\ 2}\left\|\vec{j}\right\|^2 + z_1^{\ 2}\left\|\vec{k}\right\|^2 + x_1y_1\,\vec{i}.\vec{j} + x_1z_1\,\vec{i}.\vec{k} + y_1z_1\,\vec{j}.\vec{k}}$$

Aire algébrique :
$$\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 = \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right) \wedge \left(x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}\right)$$
$$\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 = \left(x_2y_3 - y_2x_3\right)\vec{i}\wedge\vec{j} + \left(y_2z_3 - z_2y_3\right)\vec{j}\wedge\vec{k} + \left(z_2x_3 - x_2z_3\right)\vec{k}\wedge\vec{i}$$

Volume algébrique : V = (aire algébrique) * hauteur $\boxed{V = \vec{V}_1.\left(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3\right)}$

$$\begin{aligned}V &= z_1\left(x_2y_3 - y_2x_3\right)\vec{k}.\left(\vec{i}\wedge\vec{j}\right) + x_1\left(y_2z_3 - z_2y_3\right)\vec{i}.\left(\vec{j}\wedge\vec{k}\right) \\ &\quad + y_1\left(z_2x_3 - x_2z_3\right)\vec{j}.\left(\vec{k}\wedge\vec{i}\right)\end{aligned}$$
$$V = Det_{\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)}\left(\vec{V}_1,\vec{V}_2,\vec{V}_3\right) * \left(\vec{i}.\left(\vec{j}\wedge\vec{k}\right)\right)$$



$\vec{i}.\left(\vec{j}\wedge\vec{k}\right)$ **: Volume de base**

Déterminant :
$$Det_{\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)}\left(\vec{V}_1,\vec{V}_2,\vec{V}_3\right) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \begin{aligned}&= x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3 \\ &\quad - x_1y_3z_2 + y_1z_3x_2 + z_1x_3y_2\end{aligned}$$

ESPACE VECTORIEL : DEFINITIONS

K-espace vectoriel : Soient $(K, O_K, +_K, 1_K, *_K)$ un corps commutatif,
$(E, O_E, +_E)$ un groupe commutatif muni de la loi externe
$K \times E \to E, \quad (\alpha, \nu) \to \alpha *_E \nu$
$(E, O_E, +_E, *_E)$ est un espace vectoriel sur le corps $(K, O_K, +_K, 1_K, *_K)$ ssi :

bilinéarité

1) $\forall(\alpha, u, \nu) \in K \times E^2 \qquad \alpha *_E (u +_E \nu) = (\alpha *_E u) +(\alpha *_E \nu)$
2) $\forall(\alpha, \beta, \nu) \in K^2 \times E \qquad (\alpha +_K \beta) *_E \nu) = (\alpha *_E \nu) +_E (\beta *_E \nu)$
3) $\forall(\alpha, \beta, \nu) \in K^2 \times E \qquad (\alpha *_K \beta) *_E \nu = \alpha *_E (\beta *_E \nu)$
4) $\forall \nu \in E \qquad 1_K *_E \nu = \nu$

Les éléments de K sont appelés "scalaires", ceux de E, "vecteurs".

⇨ Plan Euclidien : $K = \Re$, $\quad +_K = +, *_K = *, \quad 0_K = 0$ et $1_K = 1$
E^2 = Plan (E^3 =espace) $\quad +_E$ = addition vectorielle $\quad 0_E = \vec{0}$

Application linéaire: Soient $(E, O_E, +_E, *_E)$ et $(F, O_F, +_F, *_F)$ 2 espaces vectoriels
sur le corps $(K, O_K, +_K, 1_K, *_K)$ et
$f : E \to F$ une application de E dans F.
f est une application linéaire ssi :

1) $\forall(u, \nu) \in E^2 \qquad f(u +_E \nu) = f(u) +_F f(\nu)$
2) $\forall(\alpha, \nu) \in K \times E \qquad f(\alpha *_E \nu) = \alpha *_F (\nu)$

⇨ Une application linéaire est un morphisme d'espaces vectoriels.

Pour que f soit une application linéaire, il faut et il suffit que :
$\forall(u, u', \alpha, \alpha') \in E^2 \times K^2 \qquad f(\alpha u + \alpha' u') = \alpha f(u) + \alpha' f(u')$

⇒ **ISOMETRIES, MATRICES**

ESPACE VECTORIEL : STRUCTURE

K-linéarité :

Soit $f : E \to F$ une application K-linéaire.
Si f est bijective, alors f^{-1} est aussi K-linéaire.

Soit $f : E \to F$ une application K-linéaire. f est un isomorphisme d'espace vectoriel ssi f est bijective. E et F sont alors dits "isomorphes".

Combinaison linéaire :

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_k$ k vecteurs d'un K-espace vectoriel.
On appelle "combinaison linéaire " de $u_1, u_2, \ldots, u_k$ tout vecteur de E de la forme :

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, u_i \qquad \text{i.e.} \qquad \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont des scalaires (éléments de K).

Indépendance linéaire :

Soient E un K-espace vectoriel et $u_1, u_2, \ldots, u_p$ des vecteurs de E.
On dit que $u_1, u_2, \ldots, u_p$ sont linéairement indépendants ssi :

$$\forall(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in K^p \qquad [\, \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p = 0]$$

Le système $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est "libre".
Si les vecteurs u_p ne sont pas indépendants, le système est "lié".

Base :

Soit E un K-espace vectoriel. On dit que n vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_n$ de E forment une base de E ssi :

1) Ils engendrent E
2) Ils sont linéairement indépendants.

Dimension de E :

Soit E un espace vectoriel. On dit que E est de dimension finie s'il existe n vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_n$ formant une base de E. n est la "dimension" de E.

ESPACE VECTORIEL : DUALITE - ORTHOGONALITE

Forme linéaire :

On appelle "forme linéaire " sur E une application linéaire de E dans K, considéré comme K-espace vectoriel.
Le K-espace vectoriel constitué par les formes linéaires sur E se note E*
et est appelé "dual" de E. Le dual de E* est noté E** et est appelé "bidual".

Si E est de dimension $n \geq 1$ et si $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E, alors chaque forme linéaire f sur E est uniquement déterminée par la donnée des scalaires $(\phi(1), \phi(2), ..., \phi(n))$.

Forme linéaire : coordonnée

Pour chaque i tel que $1 \leq i \leq n$, il y'a une forme linéaire remarquable e_i^* définie par:

$$e_i^* (e_j) = \delta_{ij}$$

(δ_{ij} = symbole de Kroneker : $\delta_{ij} = 1$ si i=j,
$\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$)

La famille $(e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*)$ est la base duale de E*

Orthogonalité :

Soient $x \in E$ et $\phi \in E^*$. x et ϕ sont orthogonaux ssi $\phi(x) = 0$ i.e. ssi $x(\phi) = 0$.

Soient A une partie de E et V une partie de E*. A et V sont orthogonales ssi chaque élément de A est orthogonal à chaque élément de V.

Soit A une partie de E. On appelle "orthogonal de A" et on note $A^\perp$ l'ensemble des éléments de E orthogonaux à tous les éléments de V.

ESPACES VECTORIELS : PRODUIT SCALAIRE - PROJECTEUR

NOTATION DES VECTEURS

Vecteur projeté : représenté par un "ket" (notation de Dirac) ou un vecteur colonne.

$$|b_1 b_2 \cdots b_n\rangle \qquad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Vecteur de projection : représenté par un "bra" (notation de Dirac) ou un vecteur ligne.

$$\langle a_1 a_2 \cdots a_\mathrm{n}| \qquad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

Produit scalaire : projection du vecteur $|b_1\, b_2 \cdots b_n\rangle$ de E sur le vecteur $\langle a_1\, a_2 \cdots a_\mathrm{n}|$ de E
= bra-ket (jeu de mots : bracket = crochet en Anglais)

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \qquad \langle a_1 a_2 \cdots a_\mathrm{n} | b_1 b_2 \cdots b_n\rangle$$

Coordonnées : projections du vecteur $|a_1\, a_2 \cdots a_n\rangle$ de E sur les vecteurs de base $\langle e_1{}^*\; e_2{}^* \cdots\; e_\mathrm{n}{}^*|$ de E*

$$a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \qquad a_2 = \langle\, 0^*\, 1^* \ldots 0^*\, |a_1\, a_2 \cdots a_n\rangle$$

Exercice n° 1 : Calculs dans le plan Euclidien

On considère le plan Euclidien P muni d'une norme et d'une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ telle que :

$$\|\vec{e}_1\| = 2 \qquad \|\vec{e}_2\| = 2/3 \qquad (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 120° \qquad \overrightarrow{OM} : (1/2, 2)$$

1) Mesurez l'angle α que fait le vecteur $\overrightarrow{OM}$ avec le vecteur de base $\vec{e}_1$.

2) Calculez l'aire algébrique A de la base .

3) Calculez l'aire algébrique A* de la base duale, puis son produit avec A.

4) Calculez le produit scalaire de $\overrightarrow{OM}$ avec $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ $\vec{e}_1^{\,*}, \vec{e}_2^{\,*}$.
Vérifiez graphiquement les valeurs obtenues

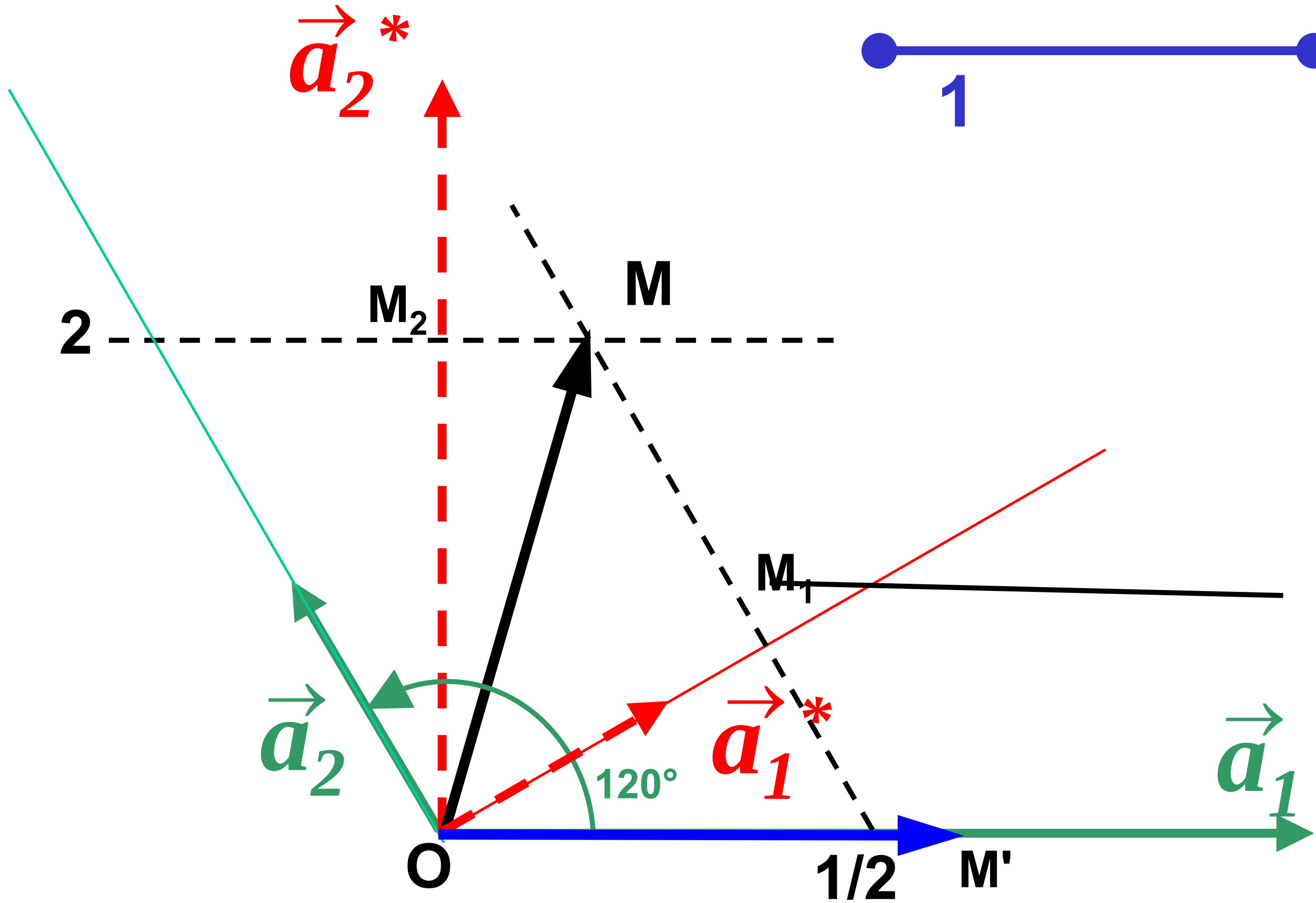
On considère l'isométrie $R_{O,-\alpha}$.

5) Comment se transforme le vecteur $\overrightarrow{OM}$? Quelles sont ses coordonnées ?

6) Vérifiez que $R_{O,-\alpha}$ est une isométrie. Est-elle une application linéaire ?

7) Comment se transforme le vecteur $\overrightarrow{OM}$ par les isométries $R_{O,\theta}$, S_Δ
(Δ = droite d'équation y = x), $G_{\Delta, v}$ (v = |2 1>) et T_v ?

ENONCE : $\left\|\vec{a}_1\right\| = 2$ $\left\|\vec{a}_2\right\| = 2/3$ $\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2\right) = 120°$ $OM = \left(1/2,\, 2\right)$



CALCUL : $\left\|\vec{a}_1^{\,*}\right\| = 0{,}577$ $\left\|\vec{a}_2^{\,*}\right\| = 1{,}731$ **MESURE :** $OM_1 \approx 0{,}85$ $OM_2 \approx 1{,}15$

x_1 = <1 0*|OM>	x_1 = OM_1 a_1*	x_1 ≈ 0,85*0,577	x_1 ≈ 0,5
x_2 = <0 1*|OM>	x_2 = OM_2 a_2*	x_2 ≈ 1,15 *1,731	x_2 ≈ 2,0

Réponse à l'Exercice n° 1 : Calculs dans le plan Euclidien

On considère le plan Euclidien P muni d'une norme et d'une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ **telle que :**

$$\|\vec{e}_1\| = 2 \qquad \|\vec{e}_2\| = 2/3 \qquad (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 120\,° \qquad \overrightarrow{OM} : (1/2, 2)$$

1) **Mesurez l'angle α que fait le vecteur** $\overrightarrow{OM}$ **avec le vecteur de base** $\vec{e}_1$.

Réponse : α = 25° environ.

2) **Calculez l'aire algébrique A de la base** .

Réponse : $\|A\| = \|\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2\| \qquad A = \left| e_1\, e_2 \sin(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \right| \qquad A = 1{,}155$

3) **Calculez l'aire algébrique A* de la base duale, puis son produit avec A.**

Réponse : $A^* = 0{,}865 \qquad A * A^* = 1{,}155 * 0{,}865 \qquad A * A^* \cong 1$

4) **Calculez le produit scalaire de** $\overrightarrow{OM}$ **avec** $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \quad \vec{e}_1^{\,*}, \vec{e}_2^{\,*}$ **.**

Vérifiez graphiquement les valeurs obtenues

$$\overline{OM}.\vec{e}_1 = (1/2\,\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2).\vec{e}_1 \qquad \overline{OM}.\vec{e}_1 = 1/2\, e_1^{\,2} + 2\, e_1.e_2 \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \qquad \overline{OM}.\vec{e}_1 = 2{,}666$$

$$\overline{OM}.\vec{e}_1^{\,*} = (1/2\,\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2).\vec{e}_1^{\,*} \qquad \overline{OM}.\vec{e}_1^{\,*} = 1/2 \qquad \overline{OM}.\vec{e}_2^{\,*} = 2 \qquad \overline{OM}.\vec{e}_2 = 0{,}556$$

On considère l'isométrie $\mathbf{R}_{O,-\alpha}$ **.**

5) **Comment se transforme le vecteur** $\overrightarrow{OM}$ **? Quelles sont ses coordonnées ?**

$$\overline{OM} : (1/2,\, 2) \Rightarrow \overline{OM}' : (OM / e_1,\, 0) \qquad \left\|\overline{OM}\right\|^2 = (1/2\,\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2)(1/2\,\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2)$$

$$\left\|\overline{OM}\right\|^2 = 1/4\, e_1^{\,2} + 4\, e_2^{\,2} + 2 e_1\, e_2 (\vec{e}_1, \vec{e}_2) \qquad \left\|\overline{OM}\right\|^2 = 1{,}444 \quad \overline{OM}' : ((1{,}202/2),\, 0) = (0{,}601,\, 0)$$

6) **Vérifiez que** $\mathbf{R}_{O,-\alpha}$ **est une isométrie. Est-elle une application linéaire ?**

7) **Comment se transforme le vecteur** $\overrightarrow{OM}$ **par les isométries** $\mathbf{R}_{O,\,\theta}$ **,** $\mathbf{S}_{\Delta}$

(Δ = droite d'équation y = x), $\mathbf{G}_{\Delta,\, v}$ **(v = |2 1>) et** $\mathbf{T}_{v}$ **?**

Exercice n° 2 : Décomposition de Fourier

On considère l'ensemble des fonctions f(x) ($x \in \mathbb{R}$) périodiques de période L, continues sur l'intervalle [0, L [.

1) Définissez l'espace de définition X_1, l'espace image X_2 de f(x). : f : $X_1 \rightarrow X_2$.
2) {f(x)} forme-t'il un espace vectoriel ? Quelle serait sa dimension ?
3) Quelles propriétés peut-on <u>attendre</u> d'une base $\{e_1, e_2, \ldots\}$ de{f(x) }?
4) On se propose de décomposer f(x) sur la base

$\{\ldots, \langle e_{-n}|, \langle e_{-(n-1)}|, \ldots, \langle e_{-1}|, \langle e_0|, \langle e_1|, \ldots \langle e_{(n-1)}|, \langle e_n|, \ldots\}$

telle que $\left\langle e_j \right| = \left\langle e^{i\, j \frac{2\pi}{L} x} \right|$

Quelles sont les coordonnées C_j de f(x) ?
On définit le produit scalaire de f(x) et g(x) par :

$$\langle g(x) | f(x) \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} f(x)\, g(x) \quad dx$$

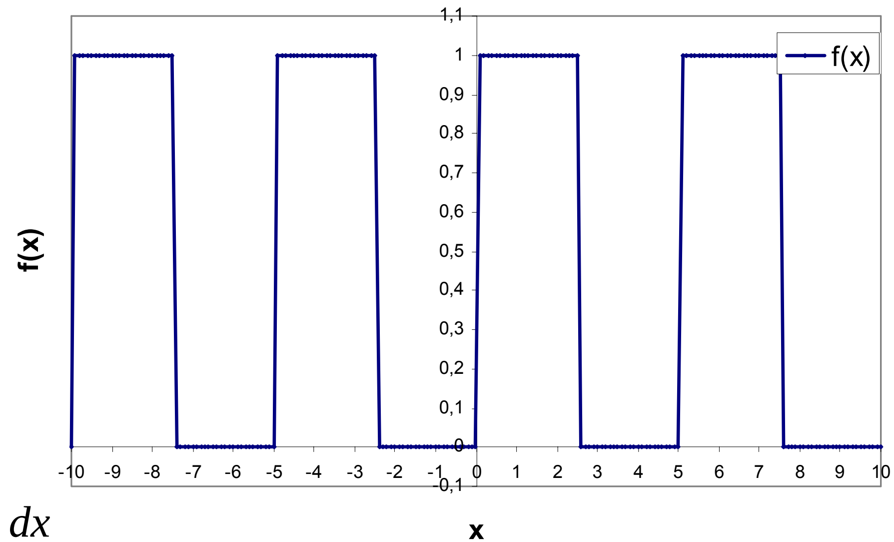
5) Application pour f(x) tq $\begin{cases} f(x) = 1 \text{ pour } 0 < x \leq L/2 \\ f(x) = 0 \text{ pour } L/2 < x \leq L \end{cases}$

a) Tracer f(x) sur [-2L, 2L].
b) Calculez $C_0, C_1, C_{-1}, C_2, C_{-2}, C_3, C_{-3}, \ldots, C_j, C_{-j}$.
c) Calculez les composantes de Fourier de f(x)
d)Représentez les composantes de Fourier réelles $\langle e_{-j}|\, C_{-j} + \langle e_j|\, C_j$, j = 1, 5

Décomposition de Fourier

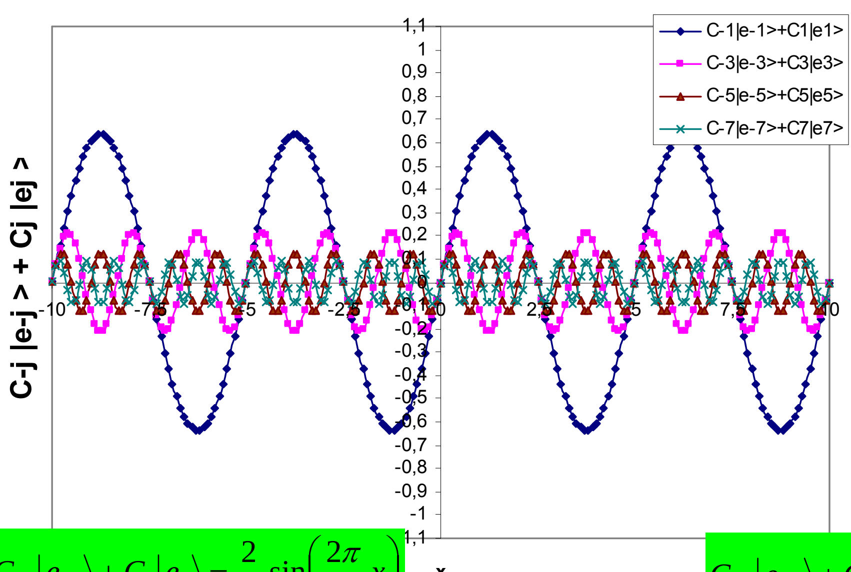
f(x) = 1 pour 0 < x ≤ L/2
f(x) = 0 pour L/2 < x ≤ L

f(x) avec L=5

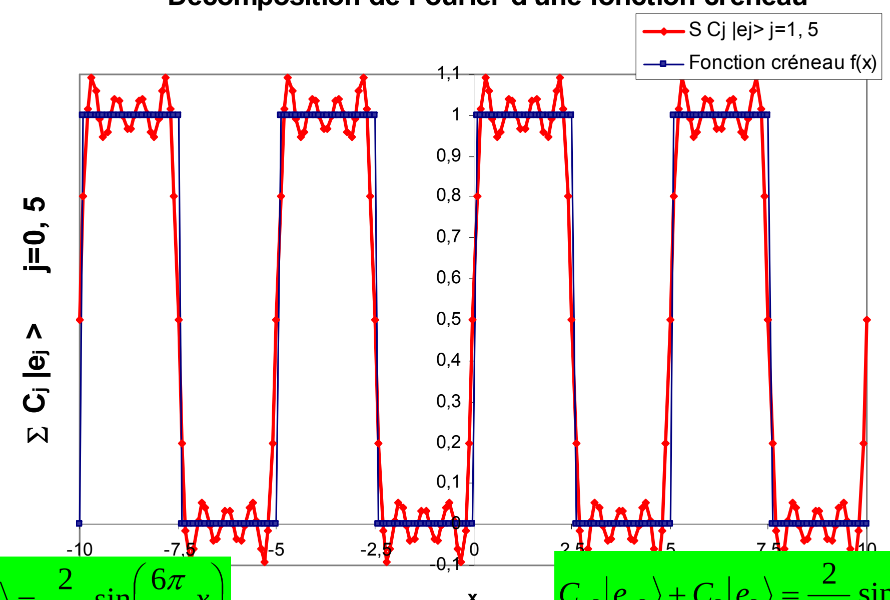


$$C_j + C_{-j} = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{+L/2} f(x)\cos\left(j\frac{2\pi}{L}x\right)dx$$

Termes de la décomposition de Fourier d'un créneau



Décomposition de Fourier d'une fonction créneau



$$C_{-1}|e_{-1}\rangle + C_1|e_1\rangle = \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$$

$$C_{-3}|e_{-3}\rangle + C_3|e_3\rangle = \frac{2}{3\pi}\sin\left(\frac{6\pi}{L}x\right)$$

$$C_{-3}|e_{-3}\rangle + C_3|e_3\rangle = \frac{2}{3\pi}\sin\left(\frac{6\pi}{L}x\right)$$

MATRICES : DEFINITIONS

Matrice :

Soit K un corps commutatif et m et n des entiers strictement positifs.
Une matrice à m lignes et n colonnes à coefficients dans K est une famille d'éléments de K indexée par l'ensemble [1, m] x [1, n].

L'ensemble des matrices m x n à coefficients dans K est notée $\mathcal{M}_{m,n}$ (K).

Eléments : (Coefficients)

Une matrice A de $\mathcal{M}_{m,n}$ (K) est une famille (α_{ij}) où α_{ij} sont des scalaires appartenant à K, nommés "coefficients" ou "éléments" de A.

Représentation:

Tableau rectangulaire avec m lignes et n colonnes, placé entre parenthèses.
L'élément α_{ij} se trouve à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne.

$$A_1 \in \mathcal{M}_{2,3}(K) \quad \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix}$$

$$A_2 \in \mathcal{M}_{4,3}(\Re) \quad \begin{pmatrix} 1{,}23 & -1{,}18 & \sqrt{2} \\ -\pi/2 & 15{,}72 & 3/8 \\ 35{,}0 & tg(34°) & 2{,}4^3 \\ 0 & \cos(\pi/5) & \sqrt[3]{12} \end{pmatrix}$$

$$A_3 \in \mathcal{M}_{4,4}(C) \quad \begin{pmatrix} 1-i & \sqrt{2} & 5i & 2+i \\ 2+3i & 2{,}1 & -6{,}3i & 1+2{,}1i \\ 4{,}2 & 3+2i & 2+3i & \sqrt{3}i \\ -\sqrt{3}i & \pi & -i & 2 \end{pmatrix}$$

Vecteur ligne: **Elément l_i (A) = (α_{i1}, α_{i2}, ..., α_{in}) de K^n.** $\longrightarrow l_2(A_2) = \begin{pmatrix} -\pi/2 & 15{,}72 & 3/8 \end{pmatrix}$

Matrice ligne : **Matrice avec m = 1 ligne (élément de $\mathcal{M}_{1,n}$(K))** $\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Vecteur colonne: **Elément c_i (A) = (α_{1j}, α_{2j}, ..., α_{mj}) de K^n.** $\longrightarrow c_3(A_2) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 3/8 \\ 2{,}4^3 \\ \sqrt[3]{12} \end{pmatrix}$

Matrice colonne: **Matrice avec n = 1 colonne (élément de $\mathcal{M}_{m,1}$(K))** $\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

MATRICES REMARQUABLES

Matrice ligne : Matrice avec m = 1 ligne (élément de $\mathcal{M}_{1,n}(K)$) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Matrice colonne: Matrice avec n = 1 colonne (élément de $\mathcal{M}_{m,1}(K)$) $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Matrice nulle O_{mn}: Matrice telle que tous ses éléments sont nuls : $\forall i \in (1, m), \forall j \in (1, n) \quad \alpha_{ij} = 0$
Elément neutre pour l'addition dans $\mathcal{M}_{m,n}(K)$.

Matrice carrée : Matrice pour laquelle le nombre m de lignes égale le nombre n de colonnes.
Elément de M_{nn} (K).

* **Matrice triangulaire supérieure** U_m : seuls les éléments α_{ij} avec $i \leq j$ sont non nuls
$\forall i \in (1, m), \forall j \in (1, m) \quad \alpha_{ij} = 0$ si $i > j$
* **Matrice triangulaire inférieure** L_m : seuls les éléments α_{ij} avec $i \geq j$ sont non nuls
$\forall i \in (1, m), \forall j \in (1, m) \quad \alpha_{ij} = 0$ si $i < j$
* **Matrice diagonale d'ordre m** $Diag_m$: seuls les éléments α_{ij} avec i=j sont non nuls
$\forall i \in (1, m), \forall j \in (1, m) \quad \alpha_{ij} = 0$ si $i \neq j$

* **Matrice Identité d'ordre m** I_m : seuls les éléments α_{ij} avec i=j sont non nuls et $\alpha_{ii}=1$
$\forall i \in (1, m), \forall j \in (1, m) \quad \alpha_{ij} = 0$ si $i \neq j$, $\alpha_{ii} = 1$
$\alpha_{ij} = \delta_{ij}$ δ = fonction de Kronecker
Elément neutre pour la multiplication dans $\mathcal{M}_{nn}$ (K)

$$O_{4,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad Diag_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

OPERATIONS SUR LES MATRICES

Addition :

Soient A = (α_{ij}) et B = (β_{ij}) 2 éléments de $\mathcal{M}_{m,n}$(K)).

On désigne par A+B la matrice de $\mathcal{M}_{m,n}$(K) d'éléments (α_{ij} + β_{ij}).

L'opération (A, B) $\rightarrow$A+B s'appelle "l'addition de matrices" dans $\mathcal{M}_{m,n}$ (K).

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23}\end{pmatrix} \quad A+B=\begin{pmatrix}a_{11}+\beta_{11} & a_{12}+\beta_{12} & a_{13}+\beta_{13}\\ a_{21}+\beta_{21} & a_{22}+\beta_{22} & a_{23}+\beta_{23}\end{pmatrix}$$

Propriétés :	**A+(B+C) = (A+B)+C**	**Associativité**
	A+B = B+A	**Commutativité**
	A+O_{mn} = A	**Elément neutre**
	A+ (-A) =O_{mn}	**Opposé**

Produit par un scalaire k :

Soit k $\in$K et A un élément de $\mathcal{M}_{m,n}$(K)).

On désigne par kA la matrice de $\mathcal{M}_{m,n}$ (K) d'éléments (k*α_{ij}).

L'opération (k, A) $\rightarrow$kA s'appelle "le produit de la matrice A par le scalaire k " dans $\mathcal{M}_{m,n}$ (K).

$$k, \qquad A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\end{pmatrix} \qquad kA=\begin{pmatrix}k\alpha_{11} & k\alpha_{12} & k\alpha_{13}\\ k\alpha_{21} & k\alpha_{22} & k\alpha_{23}\end{pmatrix}$$

Propriétés :	**k_1 (k_2 A) = (k_1 k_2) A**	
	(k_1 + k_2) A = k_1 A + k_2 A	
	k_1 (A + B) = k_1 A + k_1 B	**Bilinéarité**
	1 A = A	**Elément neutre**

OPERATIONS SUR LES MATRICES

Multiplication : de matrices

Soient A = (α_{ik}) un élément de $\mathcal{M}_{m,p}(K)$) et B = (β_{kj}) un élément de $\mathcal{M}_{p,n}(K)$

On désigne par A*B la matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ d'éléments (γ_{ij}) :

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \alpha_{ik}\ \beta_{kj}$$

ATTENTION : n°colonnes (A) = n°lignes (B)

METHODE LI-CO
(LIgne-COlonne)

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1j} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{p1} & \cdots & \beta_{pj} & \cdots & \beta_{pn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \cdots & \alpha_{ip} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mp} \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{\gamma_{ij}}$$

$$\gamma_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \ldots + \alpha_{ip}\beta_{pj}$$

Propriétés :

A (B C) = (A B) C — Associativité

(A+B) C = AC + BC
A (B+C) = AB + AC — Distributivité par rapport à l'Addition (si multiplication définie)

$\cancel{A\, I_{nk} = A}$ — PAS d'Elément neutre si m≠n

A I_m = I_m A =A — I_m élément neutre pour A $\in \mathcal{M}_{m,m}$

$\cancel{A^{-1} A = I}$ — PAS d'inverse sauf si A $\in \mathcal{M}_{m,m}$

$\cancel{A\,B \neq B\,A}$ — PAS de commutativité en général

OPERATIONS SUR LES MATRICES

Puissance : de matrice

Soient A = (α_{ij}) un élément de $\mathcal{M}_{m,m}$(K))

On désigne par A^n la matrice de $\mathcal{M}_{m,m}$(K) telle que $A^n = \underbrace{A\,A \ldots A}_{n \ fois}$

A^n est la puissance $n^{ème}$ de A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1-i & 3i \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 3-2i & 2+6i \\ 4+2i & -7-2i \end{pmatrix}$$

Conjugaison : complexe

Soient A = (α_{ij}) un élément de $\mathcal{M}_{m,n}$(K))

On désigne par $\bar{A}$ ou $A^\dagger$ la matrice de $\mathcal{M}_{m,n}$(K) d'éléments ($\tilde{\alpha}_{ij}$) :

$$A = \begin{pmatrix} 1-2i & 2 & 3i \\ e^{i\varphi} & 1+3i & 4-i \\ e^{-2i\varphi} & 2 & 2i \end{pmatrix} \qquad A^+ = \begin{pmatrix} 1+2i & 2 & -3i \\ e^{-i\varphi} & 1-3i & 4+i \\ e^{2i\varphi} & 2 & -2i \end{pmatrix}$$

Transposition :

Soient A = (α_{ij}) un élément de $\mathcal{M}_{m,n}$(K))

On désigne par ${}^tA$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,m}$(K) d'éléments (α_{ji}) :

$$A = \begin{pmatrix} 1-2i & 2 & 3i \\ e^{i\varphi} & 1+3i & 4-i \\ e^{-2i\varphi} & 2 & 2i \end{pmatrix} \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} 1-2i & e^{i\varphi} & e^{-2i\varphi} \\ 2 & 1+3i & 2 \\ 3i & 4-i & 2i \end{pmatrix}$$

Propriété : Soient A $\in \mathcal{M}_{m,p}$ (K) et B $\in \mathcal{M}_{p,n}$ (K). On a : $\quad {}^t(A\,B) = {}^tB\,{}^tA$

Hermiticité :

Soit A= (α_{ij}) un élément de $\mathcal{M}_{m,m}$ (K).

La matrice A est dite "hermitienne" (ou "hermitique") si : $\quad \alpha_{ij} = \tilde{\alpha}_{ji} \quad \forall i,j$

$${}^t(A^\dagger) = ({}^tA)^\dagger = A$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\varphi} & 1+3i \\ e^{i\varphi} & 1 & e^{2i\varphi} \\ 1-3i & e^{-2i\varphi} & 2 \end{pmatrix}$$

EXERCICES D'APPLICATION

Exercice n°1 : Calculer

A = $\begin{pmatrix} +2 & +3 & -3 & +6 \\ +1 & -5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ **+** $\begin{pmatrix} +4 & +5 & -2 & -5 \\ -3 & -2 & +4 & +1 \end{pmatrix}$

B = $\begin{pmatrix} -2i & 1+3i & +4 \\ +3 & +5 & -\sqrt{6} \\ -i\sqrt{4} & +2i & -7+i \end{pmatrix}$ **+** $\begin{pmatrix} -4i & -7i & +8 \\ +3 & -3i & \sqrt{6} \\ +9i & +2 & +2 \end{pmatrix}$

C = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **+** $\begin{pmatrix} +3 & -6 \\ +3 & -3 \end{pmatrix}$

D = $\begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & \cos(\pi/6) & \sin(\pi/3) & \sin(-\pi/2) \end{pmatrix}$ **+** $\begin{pmatrix} \sin(\pi/4) & \cos(11\pi/6) & \sin(-\pi/3) & -\sin(3\pi/2) \end{pmatrix}$

Exercice n°2 : Calculer AB et BA avec :

A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ **et** **B =** $\begin{pmatrix} +1 & -2 & -5 \\ +3 & +4 & 0 \end{pmatrix}$

A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ **et** **B =** $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice n°3 : Soit A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ Calculez $A.{}^tA$ et ${}^tA.A$.

EXERCICES D'APPLICATION : REPONSES

Exercice n°1 : Calculer

A = $\begin{pmatrix} +2 & +3 & -3 & +6 \\ +1 & -5 & -3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +4 & +5 & -2 & -5 \\ -3 & -2 & +4 & +1 \end{pmatrix}$

A = $\begin{pmatrix} +6 & +8 & -5 & +1 \\ -2 & -7 & +1 & 0 \end{pmatrix}$

B = $\begin{pmatrix} -2i & 1+3i & +4 \\ +3 & +5 & -\sqrt{6} \\ -i\sqrt{4} & +2i & -7+i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4i & -7i & +8 \\ +3 & -3i & \sqrt{6} \\ +9i & +2 & +2 \end{pmatrix}$

B = $\begin{pmatrix} -6i & +1-4i & +12 \\ +6 & +5-3i & 0 \\ 7i & 2(1+i) & -5+i \end{pmatrix}$

C = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +3 & -6 \\ +3 & -3 \end{pmatrix}$

C = IMPOSSIBLE

D = $\begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & \cos(\pi/6) & \sin(\pi/3) & \sin(-\pi/2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin(\pi/4) & \cos(11\pi/6) & \sin(-\pi/3) & -\sin(3\pi/2) \end{pmatrix}$

D = $\begin{pmatrix} 2\sin(\pi/4) & 2\cos(\pi/6) & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice n°2 : Calculer AB et BA avec :

A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ **et** **B =** $\begin{pmatrix} +1 & -2 & -5 \\ +3 & +4 & 0 \end{pmatrix}$

AB = $\begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ +1 & -2 & -5 \\ +9 & +22 & +15 \end{pmatrix}$ **BA =** $\begin{pmatrix} +15 & -21 \\ +10 & -3 \end{pmatrix}$

A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ **et** **B =** $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

AB = $\begin{pmatrix} +0 & -7 & -3 & +3 \\ -11 & -4 & +6 & +1 \end{pmatrix}$ **BA : IMPOSSIBLE**

Exercice n°3 : Soit A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ Calculez $A.{}^tA$ et ${}^tA.A$.

${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$A.{}^tA = \begin{pmatrix} +5 & +1 \\ +1 & 26 \end{pmatrix}$

${}^tA.A = \begin{pmatrix} +10 & -1 & +12 \\ -1 & +5 & -4 \\ +12 & -4 & +16 \end{pmatrix}$

EXERCICE D'APPLICATION

Exercice n°5 : On se propose d'étudier la puissance $n^{\text{ème}}$ de M = $\begin{pmatrix} +a & -a \\ -b & +b \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in \mathfrak{R}^2$

On suppose que M^n peut s'écrire sous la forme : $M^n = \begin{pmatrix} +u^n & -u^n \\ -v^n & +v^n \end{pmatrix}$

a) Exprimer u^{n+1} en fonction de u^n, a et b ; puis v^{n+1} en fonction de v^n, a et b.

b) En déduire l'expression de M^n en fonction de n, a et b.

c)Application numérique pour M= $\begin{pmatrix} +3 & -3 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}$ soit : $a = 3$, $b = -1$ et $n = 2, 3, 4$ et 5

EXERCICE D'APPLICATION : REPONSES

Exercice n°5 : On se propose d'étudier la puissance $n^{\text{ème}}$ de M = $\begin{pmatrix} +a & -a \\ -b & +b \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in \Re^2$

On suppose que M^n peut s'écrire sous la forme : $M^n = \begin{pmatrix} +u^n & -u^n \\ -v^n & +v^n \end{pmatrix}$

a) Exprimer u^{n+1} en fonction de u^n, a et b ; puis v^{n+1} en fonction de v^n, a et b.

$M^{n+1} = M^n M$ soit $M^{n+1} = \begin{pmatrix} +u^n & -u^n \\ -v^n & +v^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} +a & -a \\ -b & +b \end{pmatrix}$ $M^{n+1} = \begin{pmatrix} +(a+b)u^n & -(a+b)u^n \\ -(a+b)v^n & +(a+b)v^n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} +u^{n+1} & -u^{n+1} \\ -v^{n+1} & +v^{n+1} \end{pmatrix}$

d'où $\boxed{u^{n+1} = (a+b)u^n \quad \text{et} \quad v^{n+1} = (a+b)v^n}$

b) En déduire l'expression de M^n en fonction de n, a et b.

On a $u^{n+1} = (a+b)u^n$ avec $u^n = (a+b)u^{n-1}$ soit : $u^{n+1} = (a+b)^2\, u^{n-1}$

Par récurrence, on trouve : $u^{n+1} = (a+b)^{n-1}\, u^1$ et par analogie : $v^{n+1} = (a+b)^{n-1}\, v^1$

D'autre part, $M^1 = \begin{pmatrix} +u^n & -u^n \\ -v^n & +v^n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} +a & -a \\ -b & +b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u^1 = a \\ v^1 = b \end{cases}$

d'où $\boxed{u^{n+1} = a(a+b)^{n-1} \quad \text{et} \quad v^{n+1} = b(a+b)^{n-1}}$

et : $M^n = \begin{pmatrix} +a(a+b)^{n-1} & -a(a+b)^{n-1} \\ -b(a+b)^{n-1} & +b(a+b)^{n-1} \end{pmatrix}$

c) Application numérique pour M= $\begin{pmatrix} +3 & -3 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}$ **soit : a = 3, b = -1 et n = 2, 3, 4 et 5**

$M^2 = \begin{pmatrix} +6 & -6 \\ +2 & -2 \end{pmatrix}$ $M^3 = \begin{pmatrix} +12 & -12 \\ +4 & -4 \end{pmatrix}$ $M^4 = \begin{pmatrix} +24 & -24 \\ +8 & -8 \end{pmatrix}$ $M^5 = \begin{pmatrix} +48 & -48 \\ +16 & -16 \end{pmatrix}$

EXERCICE D'APPLICATION

Exercice n°6 : On donne les matrices **A =** $\begin{pmatrix} +4 & 0 & +2 \\ 0 & +4 & +2 \\ 0 & 0 & +2 \end{pmatrix}$ **J =** $\begin{pmatrix} +1 & 0 & +2 \\ 0 & +1 & +2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **et** $I_3 = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$

a) Déterminer les réels a et b tels que $A = aI_3 + bJ$

b) Calculer J^2.

c) Calculer A^2, A^3 et A^4 à partir d'une combinaison linéaire des matrices I et J.

<u>Applications numériques</u> (a=3, b=1)

EXERCICE D'APPLICATION : REPONSES

Exercice n°6 : On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} +4 & 0 & +2 \\ 0 & +4 & +2 \\ 0 & 0 & +2 \end{pmatrix}$ $J = \begin{pmatrix} +1 & 0 & +2 \\ 0 & +1 & +2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **et** $I_3 = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$

a) Déterminer les réels a et b tels que $A = aI_3 + bJ$

$$aI_3 + bJ = \begin{pmatrix} a+b & 0 & +2b \\ 0 & a+b & +2b \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +4 & 0 & +2 \\ 0 & +4 & +2 \\ 0 & 0 & +2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ 2b=2 \\ a+b=4 \\ 2b=2 \\ a-b=2 \end{cases}$$

d'où a =3 et b = 1

---

b) Calculer J^2.

$$J^2 = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \equiv I_3$$

---

c) Calculer A^2, A^3 et A^4 à partir d'une combinaison linéaire des matrices I et J.

<u>Remarques</u> : I commute avec toute autre matrice, donc IJ=JI et $J^2 = I$

$A^2 = (a^2+b^2)I + 2abJ$, $A^3 = a(a^2+3b^2)I + b(3a^2+b^2)J$, $A^4 = (a^4+6a^2b^2+b^4)I + 4ab(a^2+b^2)J$

<u>Applications numériques</u> (a=3, b=1)

$A^2 = 10I + 6J$, $A^3 = 36I + 28J$, $A^4 = 136I + 120J$

$$\begin{pmatrix} +16 & 0 & +12 \\ 0 & +16 & +12 \\ 0 & 0 & +4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} +64 & 0 & +56 \\ 0 & +64 & +56 \\ 0 & 0 & +8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} +256 & 0 & +240 \\ 0 & +256 & +240 \\ 0 & 0 & +16 \end{pmatrix}$$

EXERCICE D'APPLICATION

Exercice n°7 : Soient les matrices A = $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ **et B =** $\begin{pmatrix} b & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$

Existe-t'il des couples (a, b) tels que AB = BA = I ?

EXERCICE D'APPLICATION : REPONSE

Exercice n°7 : Soient les matrices A = $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ **et** **B =** $\begin{pmatrix} b & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$

Existe-t'il des couples (*a*, *b*) tels que AB = BA = I ?

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} ab+2 & a+b+1 & a+b+1 \\ a+b+1 & ab+2 & a+b+1 \\ a+b+1 & a+b+1 & ab+2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ab+2=1 \\ a+b+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-\dfrac{1}{a} \\ a^2+a-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-\dfrac{1}{a} \\ a=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{-1\mp\sqrt{5}}{2} \\ a=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Solution : **(A, B) =** $\left(\begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 1 & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\right)$

ou **(A, B) =** $\left(\begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 1 & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\right)$

OPERATIONS SUR LES MATRICES CARREES

On considère les matrices A = (α_{ik}) éléments de $\mathcal{M}_{m,m}$(K)).

Déterminant : On désigne par Det(A) le scalaire tel que : $Det\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}$

Propriétés:

Det(^tA) = Det(A)
Det(AB) = Det(BA) = Det(B) Det(A)
Det (A) est inchangé si :
– on ajoute 2 colonnes de A.
– on ajoute 2 lignes de A.
Det(A) est changé en son opposé si :
– on permute 2 colonnes de A.
– on permute 2 lignes de A.
Det(kA) = k Det(A) pour tout scalaire A.
Det(A) = 0 si 1 colonne/1 ligne est nulle.
2 colonnes/2 lignes sont proportionnelles.

Calcul :

Dans $\mathcal{M}_{2,2}$(K) Det (A) = $+\alpha_{11}*\alpha_{22} - \alpha_{21}*\alpha_{12}$

Dans $\mathcal{M}_{3,3}$(K) Det (A) = $+\alpha_{11}*\alpha_{22}*\alpha_{33}+\alpha_{12}*\alpha_{23}*\alpha_{31}+\alpha_{13}*\alpha_{21}*\alpha_{32}$
$-\alpha_{11}*\alpha_{23}*\alpha_{32}-\alpha_{22}*\alpha_{13}*\alpha_{31}-\alpha_{33}*\alpha_{12}*\alpha_{21}$

Dans $\mathcal{M}_{m,m}$(K) m>3 Développement du déterminant :

LIGNE COLONNE

$$Det(A) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{mk}\left[(-1)^{m+k}\ A_{mk}\right] = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{km}\left[(-1)^{k+m}\ A_{km}\right]$$

Mineur Min(l,k) : On appelle "mineur" A_{lk} le déterminant obtenu en supprimant la k^{ème} colonne
et la l^{ème} ligne.

Cofacteur On appelle "cofacteur de a_{lk}" le nombre $(-1)^{l+k}$ A_{lk} .

EXEMPLE : CALCUL DU DETERMINANT D'UNE MATRICE CARREE $\mathcal{M}_{4,4}$(R)

Calculer Det(A) pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

1) CHOIX DE LA LIGNE/COLONNE DE DEVELOPPEMENT : Celle qui a le plus de 0

2) ISOLER LES MINEURS / LES CALCULER

$$\begin{pmatrix} & \alpha_{12} & & \\ 2 & & 1 & 3 \\ 1 & & 1 & 1 \\ 3 & & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & 4 & 5 \\ & \alpha_{22} & & \\ 1 & & 1 & 1 \\ 3 & & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & 4 & 5 \\ 2 & & 1 & 3 \\ & \alpha_{32} & & \\ 3 & & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & 4 & 5 \\ 2 & & 1 & 3 \\ 1 & & 1 & 1 \\ & \alpha_{42} & & \end{pmatrix}$$

$$Min(1,2) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \quad Min(2,2) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -11 \quad Min(3,2) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad Min(4,2) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

3) CALCULER LES TERMES $\beta_{lk} = \alpha_{lk} * (-1)^{l+k} * \mathrm{Min}(l,k)$

$\beta_{12} = 2*(-1)^{1+2}*(-1) = 2$ $\qquad$ $\beta_{22} = 0*(-1)^{2+2}*(-11) = 0$

$\beta_{32} = 0*(-1)^{3+2}*0 = 0$ $\qquad$ $\beta_{42} = 2*(-1)^{4+2}*7 = 14$

4) SOMMER LES TERMES : $Det(A) = \sum_{l=1}^{4} \beta_{l2} = 2 + 0 + 0 + 14 = 16$

OPERATIONS SUR LES MATRICES CARREES

On considère les matrices A = (α_{ik}) éléments de $\mathcal{M}_{m,m}(K)$).

Inverse :

On désigne par A^{-1} l'élément de $\mathcal{M}_{m,m}(K)$ tel que $A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I_m$

Propriétés:

A^{-1} existe ssi $\mathrm{Det}(A) \neq 0$

$(AB)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$ si A^{-1}, B^{-1} et $(AB)^{-1}$ existent

${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$ si A^{-1}, ${}^t(A^{-1})$ existent

Calcul :

1) **<u>Devinette vérification</u> (marche rarement – très rapide)**

2) **<u>Pivotage – combinaison linéaire</u> (programmable – rapide)**
   - a) Ecrire A et I_m côte-à-côte
   - b) Combiner linéairement les lignes (colonnes) de A ET I_m sans les permuter, de façon à faire apparaître progressivement I à la place de A $\rightarrow I_m$ est alors remplacé par A^{-1}
   - c) VERIFIER

3) **<u>Méthode du déterminant</u> (peu rapide)**
   - a) Calculer Det(A). Vérifier que $\mathrm{Det}(A) \neq 0$
   - b) Calculer la matrice des mineurs A_{ij} de Det(A)
   - c) Calculer la matrice des cofacteurs a_{ij} de Det(A)
   - d) Transposer la matrice des cofacteurs
   - e) Multiplier la matrice par 1/Det(A)
   - f) VERIFIER

4) **<u>Décomposition LU</u>**

INVERSION D'UNE MATRICE CARREE : METHODE DU PIVOT DE GAUSS

- **Méthode systématique** (Procédé ligne à ligne <u>ou</u> colonne à colonne) (Pivotage partiel)
  $\Rightarrow$ Aisément programmable en Informatique
- **Peu (pas utilisée) car numériquement instable** (diverge si $a_{ii} = 0$)
- **Ne permet pas de calculer Det(A)**

PRINCIPE :

Soient $|B_1\rangle, |B_2\rangle, \ldots, |B_l\rangle, \ldots, |B_n\rangle$ n vecteurs colonnes d'éléments δ_{lk}, $l \in (1, \ldots, n)$

$$\left|B_1\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left|B_2\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left|B_k\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left|B_n\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_{j1} & & a_{jk} & & a_{jn} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \left|X_k\right\rangle = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix}$$

Méthode de Gauss : résolution simultanée des n systèmes :

$A\,|V_1\rangle = |B_1\rangle$, ..., $A\,|V_k\rangle = |B_k\rangle$, ..., $A\,|V_n\rangle = |B_n\rangle$ soit $A\,V = I$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_{j1} & & a_{jk} & & a_{jn} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n^2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} x_1^n \\ x_2^n \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n^n \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

On a alors $A^{-1} = V = [\,|V_1\rangle, |V_2\rangle, \ldots, |V_k\rangle, \ldots, |V_n\rangle\,]$

INVERSION D'UNE MATRICE CARREE : METHODE DU PIVOT DE GAUSS

1) Ecrire A et I_m côte-à-côte

2) Pour chaque élément diagonal a_{ii} de A (pivot), $i = 1,m$

- **diviser la $i^{ème}$ ligne de A et I par a_{ii}** => a_{ii} remplacé par 1
- **modifier simultanement A et I par combinaison linéaire des lignes / colonnes de A et I de façon à annuler tous les a_{ji} / a_{ij}**

=> colonne i / ligne i à zéro, sauf $a_{ii}=1$

⇨ I_m apparait progressivement à la place de A et A^{-1} à la place de I_m

A : Matrice à inverser

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

Départ

B : Matrice Identité I

$$\begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$a_{11} = 4 \quad \Rightarrow l_1 \rightarrow l_1 / 4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ -5/2 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$a_{12} = 10 \quad \Rightarrow l_2 \rightarrow l_2 - 10 l_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ -1/2 & 1/5 \end{pmatrix} \right.$$

$$a_{22} = 5 \quad \Rightarrow l_2 \rightarrow l_2 / 5$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/5 \end{pmatrix} \right.$$

$$a_{12} = 5/2 \quad \Rightarrow l_1 \rightarrow l_1 - 5/2\, l_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/5 \end{pmatrix} \right.$$

A: Matrice Identité I

B : Matrice inversée A^{-1}

INVERSION D'UNE MATRICE CARREE : METHODE DU PIVOT DE GAUSS

REALISATION :

On considère simultanément A (matrice à inverser) et B (matrice identité)
Pour chaque ligne i (i = 1, n) :

1) Réduire le pivot a_{ii} à 1 en divisant la i^{ème} ligne par a_{ii}

A : $a_{ik} / a_{ii} \rightarrow a_{ik}$ B : $b_{ik} / b_{ii} \rightarrow b_{ik}$ k = 1, n

2) Annuler les éléments non diagonaux a_{ji} (j ≠ i) de la i^{ème} colonne en soustrayant à chaque j^{ème} ligne a_{ji} fois la i^{ème} ligne :

A : $a_{jk} - a_{ji} * a_{ik} \rightarrow a_{jk}$ B : $b_{jk} - b_{ji} * b_{ik} \rightarrow b_{jk}$ k = 1, n

Passer à la ligne suivante.

A la fin, A et B sont remplacées respectivement par I et A^{-1}.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pivot : $a_{11}=1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a_{1k}=a_{1k}/1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a_{2k} = a_{2k} - a_{21}*a_{11},\quad a_{3k} = a_{3k} - a_{3k}*a_{11}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pivot : $a_{22}=-1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a_{2k}=a_{2k}/-1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$a_{1k} = a_{1k} - a_{1k}*a_{22},\quad a_{3k} = a_{3k} - a_{3k}*a_{22}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

pivot : $a_{33}=2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$a_{2k}=a_{2k}/-1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$a_{1k} = a_{1k} - a_{1k}*a_{22},\quad a_{3k} = a_{3k} - a_{3k}*a_{22}$

$$\mathbf{I} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \longleftarrow \mathbf{A^{-1}}$$

EXERCICES D'APPLICATION

Exercice n°8 : Calculer l'inverse des matrices suivantes par la méthode du pivot de Gauss :

A = $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ **B =** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **C =** $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice n°9 : Soit la matrice M = $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$

a) Calculer M^2 et M^3. En déduire que $M^3 + 2M^2 - M - 2I = 0$

b) Montrer que M est inversible et calculer son inverse M^{-1}.

« CALCUL DE L'INVERSE D'UNE MATRICE
PAR LA METHODE DU POLYNOME ANNULATEUR »

EXERCICES D'APPLICATION : REPONSES

Exercice n°8 : Calculer l'inverse des matrices suivantes par la méthode du pivot de Gauss :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} +\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{4} \\ +\frac{1}{8} & +\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & +\frac{5}{8} \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} +\frac{1}{12} & +\frac{1}{12} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{5}{12} & +\frac{7}{12} & -\frac{1}{4} \\ +\frac{1}{4} & +\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ -2 & -11/4 & -4 & 5/4 \\ 0 & 3/4 & 1 & -1/4 \\ -2 & -7/4 & -2 & 5/4 \end{pmatrix}$$

Exercice n°9 : Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$

a) Calculer M^2 et M^3. En déduire que $M^3 + 2M^2 - M - 2I = 0$

$$M^2 = \begin{pmatrix} +7 & -6 & -6 \\ 0 & +1 & 0 \\ +3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} -15 & +14 & +14 \\ -2 & +5 & +4 \\ -5 & +1 & +2 \end{pmatrix}$$

$$M^3 + 2M^2 - M - 2I = \begin{pmatrix} -15 & +14 & +14 \\ -2 & +5 & +4 \\ -5 & +1 & +2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +14 & -12 & -12 \\ 0 & +2 & 0 \\ +6 & -6 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +3 & -2 & -2 \\ +2 & -5 & -4 \\ -1 & +5 & +4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Montrer que M est inversible et calculer son inverse M^{-1}.

$$M^3 + 2M^2 - M - 2I = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M(M^2 + 2M - I) = 2I \Leftrightarrow \quad M\left[\,1/2\,(M^2 + 2M - I)\right] = I$$

On identifie l'expression à : $\quad M\,M^{-1} = I \quad$ avec $M^{-1} = 1/2\,(M^2 + 2M - I)$

soit : $$M^{-1} = 1/2 \left[\begin{pmatrix} +7 & -6 & -6 \\ 0 & +1 & 0 \\ +3 & -3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & +4 & +4 \\ -4 & +10 & +8 \\ +2 & -10 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \Leftrightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & +5 & +4 \\ +\frac{5}{2} & -\frac{13}{2} & -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

« CALCUL DE L'INVERSE D'UNE MATRICE PAR LA METHODE DU POLYNOME ANNULATEUR »

METHODE DE GAUSS-JORDAN

- **Méthode systématique** (Procédé ligne à ligne <u>ou/et</u> colonne à colonne) (Pivotage total)
  $\Rightarrow$ Programmable en Informatique
- **Très utilisé car numériquement stable** (en particulier si permutation des lignes <u>et</u> colonnes)
- **Ne permet pas de calculer Det(A)**

PRINCIPE à peu près similaire au pivot de Gauss (évite la divergence pour a_{ii}=0) :

On considère simultanément A (matrice à inverser) et B (matrice identité)

A) Pour chaque colonne i (i = 1, n) à simplifier :

1) Repérer dans toute la matrice le pivot a_{mn} maximum ($|a_{mn}| \geq |a_{jk}|$ pour j, k = 1, n
2) Amener le pivot maximal sur la position diagonale a_{ii} en :
   * permutant la n^{ème} colonne et i^{ème} colonne de A (n^{ème} ligne et i^{ème} ligne de B)
   * permutant la m^{ème} ligne et i^{ème} ligne de A (m^{ème} colonne et i^{ème} colonne de B)
3) Réduire le pivot a_{ii} à 1 en divisant la i^{ème} ligne par a_{ii} :

   A : $a_{ik}/ a_{ii} \rightarrow ai_k$ B : $b_{ik}/ b_{ii} \rightarrow bi_k$ k = 1, n
2) Annuler les éléments non diagonaux a_{ji} (j ≠ i) de la i^{ème} colonne en soustrayant à chaque j^{ème} ligne a_{ii} fois la i^{ème} ligne :

   A : $a_{jk} - a_{ji} * ai_k \rightarrow a_{jk}$ B : $b_{jk} - b_{ji} * b_{ik} \rightarrow b_{jk}$ k = 1, n

B) Passer à la colonne suivante i. (Progressivement, A et B sont remplacées par I et A^{-1}).

C) A la fin, refaire sur A et B les permutations de lignes et colonnes, dans le sens contraire où elles ont été faites.

INVERSION D'UNE MATRICE CARREE : METHODE DE GAUSS-JORDAN

A : Matrice à inverser

B : Matrice Identité I

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Départ

1) Ecrire A et I_m côte-à-côte

2) On considère un élément diagonal de A : a_{ii} (pivot)

On divise la $i^{ème}$ ligne par a_{ii} => a_{ii} remplacé par 1

Modifier simultanement A et I par :

*** combinaison linéaire**	**lignes (A)**	**ET**	**lignes(I)**
	colonnes (A)	**ET**	**colonnes (I)**
*** permutation des**	**lignes (A)**	**ET**	**colonnes (B)**
	colonnes (A)	**ET**	**lignes (B)**

⇨ I_m apparait progressivement à la place de A

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \bigg| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$l_1(A) \leftrightarrow l_2(A)$$

$$c_1(B) \leftrightarrow c_2(B)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \bigg| \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$l_1(A) - l_2(A) + l_3(A) \rightarrow l_1(A)$$

$$c_1(B) - c_2(B) + c_3(B) \rightarrow c_1(B)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \bigg| \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$l_1(A)/2 \rightarrow l_1(A)$$

$$c_1(B)/2 \rightarrow c_1(B)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \bigg| \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$l_2(A) \leftrightarrow l_3(A)$$

$$c_2(B) \leftrightarrow c_3(B)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \bigg| \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$l_2(A) - l_1(A) \rightarrow l_2(A)$$

$$c_2(B) - c_1(B) \rightarrow c_2(B)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bigg| \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$l_3(A) - l_2(A) \rightarrow l_3(A)$$

$$c_3(B) - c_2(B) \rightarrow c_3(B)$$

A: Matrice Identité I

B : Matrice inversée A^{-1}

INVERSION D'UNE MATRICE CARREE : METHODE DU DETERMINANT

1) Calculer Det(A) et vérifier que Det(A) ≠ 0

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Méthode de Sarus :

Det(A) = 0*0*0 + 1*1*1 + 1*1*1 – (0*1*1 + 1*0*1 + 1*1*0)

Det(A) = 2

2) Calculer la matrice B des mineurs A_{lk} (A) de Det(A)

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = +1$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = +1 \quad A_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

3) Calculer la matrice C des cofacteurs $(-1)^{l+k} A_{lk}(A)$

$$C = \begin{pmatrix} -1(-1)^{1+1} & -1(-1)^{1+2} & +1(-1)^{1+3} \\ -1(-1)^{2+1} & -1(-1)^{2+2} & -1(-1)^{2+3} \\ +1(-1)^{3+1} & -1(-1)^{3+2} & -1(-1)^{3+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 \end{pmatrix}$$

4) Calculer D, transposée de C

$$D = \begin{pmatrix} -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 \end{pmatrix}$$

5) Calculer la matrice A^{-1}, produit de D par 1/Det(A)

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & +1/2 & +1/2 \\ +1/2 & -1/2 & +1/2 \\ +1/2 & +1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

6) VERIFIER QUE

$$\mathbf{A\,A^{-1} = I_m}$$

EXERCICE D'APPLICATION

Exercice n°10 :

Inverser $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ **par la méthode du déterminant**

EXERCICE D'APPLICATION : REPONSE

Exercice n°10 : INVERSE D'UNE MATRICE 4X4 PAR LA MÉTHODE DU DÉTERMINANT

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calcul des Mineurs de C (pour 1 ligne ou 1 colonne seulement)

$$Min_{1,1}(C) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad Min_{1,2}(C) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 10 \qquad Min_{1,3}(C) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \qquad Min_{1,4}(C) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 5$$

$$Min_{2,1}(C) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad Min_{2,2}(C) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \qquad Min_{2,3}(C) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \qquad Min_{2,4}(C) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -1$$

$$Min_{3,1}(C) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad Min_{3,2}(C) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 8 \qquad Min_{3,3}(C) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad Min_{3,4}(C) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 10$$

$$Min_{4,1}(C) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad Min_{4,2}(C) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad Min_{4,3}(C) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad Min_{4,4}(C) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

---

2) Matrices des Mineurs Min(C) , des Cofacteurs Cofac(C) et Transposée de Cofac(C)

$$Min(C) = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & 2 & 10 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad Cofac(C) = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 4 & -5 \\ -1 & 4 & -4 & -1 \\ 2 & -8 & 2 & -10 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad {}^{t}Cofac(C) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -10 & 4 & -8 & -2 \\ 4 & -4 & 2 & 2 \\ -5 & -1 & -10 & -1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE D'APPLICATION : REPONSE (suite)

3) Calcul du déterminant de C

REMARQUE : **Peut être calculé dès que la 1ère ligne (colonne) de Mineurs est disponible afin de vérifier si la matrice est inversible.**

Développement en ligne pour la 4ème ligne, par exemple :

$$Det(A) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{mk} \left[(-1)^{m+k} \; Min_{m,k}(A)\right] \qquad \textbf{ou} \qquad Det(A) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{mk} \left[Cofac_{m,k}(A)\right]$$

$$\alpha_{41} = 3 \qquad \alpha_{42} = -1 \qquad \alpha_{43} = -2 \qquad \alpha_{44} = 1$$

$$Cofac_{4,1}(C) = -1 \qquad Cofac_{4,2}(C) = -2 \qquad Cofac_{4,3}(C) = 2 \qquad Cofac_{4,4}(C) = -1$$

$$Det(C) = (3 * -1) + (-1 * -2) + (-2 * 2) + (1 * -1) \qquad Det(C) = -6$$

4) Calcul de C^{-1}

$$C^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -10 & 4 & -8 & -2 \\ 4 & -4 & 2 & 2 \\ -5 & -1 & -10 & -1 \end{pmatrix}$$

5) Vérification : $C*C^{-1} = I$?

DECOMPOSITION « LU » D'UNE MATRICE CARRE (1)

PRINCIPE : Ecrire la matrice carré A sous forme d'un produit de 2 matrices triangulaires L et U inférieure (« Lower ») et supérieure (« Upper ») respectivement

A = L . U soit :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}}_{U}$$

matrice 3*3 (ex.)

REMARQUES :

La décomposition n'est pas unique (c.f. « Procédure ») si l_{ii}, u_{ii} libres

La décomposition n'est pas toujours possible, même si A est inversible (élément l_{ij}, ou u_{ij} nul)

INTERET : Faciliter et accélérer (algorithmique) les calculs :

- Det (A) = Det (L)*Det (U) avec $Det(L) = \prod_{i=1}^{N} l_{ii}$ $Det(U) = \prod_{i=1}^{N} u_{ii}$

- $A^{-1} = U^{-1} . L^{-1}$ **ATTENTION A L'ORDRE DU CALCUL !!!**

La plupart des mineurs de L et U sont nuls

$\Rightarrow$ inversion rapide même pour une matrice d'ordre N élevé

DECOMPOSITION « LU » D'UNE MATRICE CARRE (2)

RÉALISATION :

Exprimer successivement les composantes (a_{ij}) de l'équation A = L . U :

$$a_{ij} = l_{i1}u_{1j} + l_{i2}u_{2j} + \cdots$$

en commençant par a_{11} (Algorithme de Crout).

Le nombre de termes dans la somme est fixé par le plus petit des 2 indices, *i* ou *j* :

$$i > j: \qquad l_{i1}u_{1j} + l_{i2}u_{2j} + \cdots + l_{ij}u_{ij} = a_{ij}$$

$$i < j: \qquad l_{i1}u_{1j} + l_{i2}u_{2j} + \cdots + l_{ii}u_{ij} = a_{ij}$$

$$i = j: \qquad l_{i1}u_{1j} + l_{i2}u_{2j} + \cdots + l_{ii}u_{jj} = a_{ij}$$

Les N^2 équations précédentes font intervenir *N(N+1)* variables l_{ij} et u_{ij}.

$\Rightarrow$ Sous-détermination du système d'équations

On choisit de fixer les *N* variables l_{ii} : $l_{ii} = 1 \qquad i = 1, \cdots, N$

Pour chaque colonne $j = 1, \ldots, N$, on résout ligne *i* à ligne *i* :

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\, u_{kj} \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, j$$

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\, u_{kj}\right) \qquad \text{pour } i = j+1, j+2, \ldots, j+N$$

DECOMPOSITION « LU » D'UNE MATRICE CARRE (3)

EXEMPLE : 1) Ecrire la matrice carré A sous forme d'un produit de 2 matrices triangulaires L et U

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) On écrit A = L.U sous forme matricielle en imposant l_{ii} = 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

b) On résoud pour la 1ère ligne (*i* =1) et la 1ère colonne *j* = *1*

$$1 = a_{11} = l_{11}u_{11} + l_{12}u_{21} + l_{13}u_{31} \Rightarrow 1 = a_{11} = u_{11}$$

On remplace $\boxed{u_{11}}$ par sa valeur dans le produit de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \boxed{1} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

c) On résoud pour la 2ème ligne (*i* =2) et la 1ère colonne *j* = *1*

$$1 = a_{21} = l_{21}\boxed{u_{11}} + l_{22}u_{21} + l_{23}u_{31} \Rightarrow 1 = a_{21} = l_{21}$$

On récupère la valeur de $\boxed{u_{11}}$ calculée à l'étape précédente

On remplace $\boxed{l_{21}}$ par sa valeur dans le produit de matrice

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

d) On résoud pour la 3ème ligne (*i* =2) et la 1ère colonne *j* = *1*

e) Même procédure pour la 2ème colonne PUIS la 3ème colonne

$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

DECOMPOSITION « LU » D'UNE MATRICE CARRE (4)

EXEMPLE : **2) Calculer le déterminant de la matrice carré A**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On utilise la relation $\boldsymbol{Det(A) = Det(L)*Det(U)}$

---

a) On calcule :

$$Det(L) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \qquad Det(L) = \prod_{i=1}^{3} l_{ii} = 1*1*1 = 1$$

$$Det(U) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \qquad Det(U) = \prod_{i=1}^{3} u_{ii} = 1*1*-1 = -1$$

grâce à la forme remarquable de L et U, le calcul des déterminants est élémentaire

---

b) On calcule $\boldsymbol{Det(A) = Det(L)*Det(U)}$ **:**

$$\boldsymbol{Det(A) = 1*-1 = -1}$$

DECOMPOSITION « LU » D'UNE MATRICE CARRE (5)

EXEMPLE : 3) Inverser la matrice carré A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On utilise la relation $A^{-1} = U^{-1} . L^{-1}$

---

a) On calcule U^{-1} et L^{-1} :

Grâce à la forme remarquable de L et U, le calcul des inverses est facilité :

**** Méthode du déterminant : la plupart des mineurs sont nuls.***

**** Méthode de Crout très performante.***

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{I}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{L}} \bullet \underbrace{\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}}_{\mathbf{L^{-1}}}$$

Résolution des équations

$$\begin{cases} 1) \quad x_{11} = 1 \\ 2) \quad x_{11} + x_{21} = 0 \Rightarrow x_{21} = -1 \\ 3) \quad x_{11} - x_{21} + x_{31} = 0 \Rightarrow x_{31} = -2 \\ \ldots \\ 9) \quad x_{33} = 1 \end{cases}$$

---

b) On calcule $U^{-1} . L^{-1}$:

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

APPLICATION DE L'INVERSION DE MATRICE : RESOLUTION D'UN SYSTEME DE CRAMER

Système linéaire :
m **équations linéaires avec** ***n*** **inconnues** ***x***

$$(I)\left\{\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n &= b_i \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}\right.$$

inconnues **(x_j)**

coefficients **(a_{ij})**

second membre **(b_i)**

Système linéaire homogène :
Les seconds membres b_i sont nuls

$$(I')\left\{\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\
&\vdots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n &= 0 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}\right.$$

Rang d'une application linéaire :
nombre *r* d'équations linéaires indépendantes

- * si r > n : Il existe une infinité de solutions ($x_1, x_2, ..., x_n$)
- * si r = n : Il existe une unique solution ($x_1, x_2, ..., x_n$)
- * si r < n : Il n'existe aucune solution si ($b_1, b_2, ..., b_r$) ≠ (0, 0, ..., 0)
  (0, 0, ..., 0) est solution si ($b_1, b_2, ..., b_r$) = (0, 0, ..., 0)

APPLICATION DE L'INVERSION DE MATRICE : RESOLUTION D'UN SYSTEME DE CRAMER

DEFINITION :

Système de Cramer : Système linéaire tel que :

1) nombre n d'inconnues = nombre m d'équations

2) système homogène associé : 1 unique solution

$(x'_1, x'_2, ..., x'_m) = (0, 0, ..., 0)$

$$(I)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nj}x_j + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

PROPRIETE :

Un système de Cramer admet 1 solution unique : $(x_1, x_2, ..., x_m)$

RESOLUTION MATRICIELLE D'UN SYSTEME D'EQUATIONS LINEAIRES :

ECRITURE MATRICIELLE :

Système linéaire :

A |X> = |B>

Système homogène :

A |X> = |0>

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_{j1} & & a_{jk} & & a_{jn} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

avec :

- **A = (a_{ij}) : Matrice carrée des coefficients des équations**
- **|X>= (x_i) : Vecteur colonne de solution**
- **|0> : Vecteur nul d'ordre n**
- **|B>= (b_j) : Vecteur colonne du second membre**

RESOLUTION :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_{j1} & & a_{jk} & & a_{jn} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

On a $A^{-1} A |X> = A^{-1} |B>$ $A^{-1} A |X> = A^{-1} |0>$

$|X> = A^{-1} |B>$ $|X> = A^{-1} |0>$

APPLICATION DE L'INVERSION DE MATRICE : RESOLUTION D'UN SYSTEME DE CRAMER

Objectif : Résoudre le système : $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

1) Ecrire le système sous forme matricielle

$$\begin{cases} +3\,x_1 + 1\,x_2 + -1\,x_3 = 3 \\ -1\,x_1 + 3\,x_2 + +1\,x_3 = 1 \\ 0\,x_1 + 2\,x_2 + +2\,x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit **A |X> = B**

avec : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$|X\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad |B\rangle = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) Calculer l'inverse A^{-1} de la matrice A (combinaison linéaire, pivot de Gauss, Gauss-Jordan)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} +1/4 & -1/4 & +1/4 \\ +1/8 & +3/8 & -1/8 \\ -1/8 & -3/8 & +5/8 \end{pmatrix}$$

3) Résoudre le système par inversion

A |X> = |B>

⇔ A^{-1}A |X> = A^{-1} |B>

⇔ |X> = A^{-1} |B>

$$\begin{pmatrix} +1/4 & -1/4 & +1/4 \\ +1/8 & +3/8 & -1/8 \\ -1/8 & -3/8 & +5/8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

soit : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/4 \\ -3/4 \end{pmatrix}$

EXERCICE D'APPLICATION

Exercice 11)

1) Chercher les décompositions LU de : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & 12 \\ 4 & 16 & 26 \end{pmatrix}$

2) Calculer l'inverse de B

3) Résoudre $\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3 \\ 2x_1 + 8x_2 + 12x_3 = 1 \\ 4x_1 + 16x_2 + 26x_3 = 0 \end{cases}$ **à partir d'une décomposition LU.**

(On choisira L telle que l_{ii} = 1 ($i=1,3$))

EXERCICE D'APPLICATION

1) Chercher les décompositions LU de : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & 12 \\ 4 & 16 & 26 \end{pmatrix}$

Décomposition LU de A : IMPOSSIBLE

Décomposition LU de B : $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2) Calculer l'inverse de B :

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -2 \\ 0 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 7/2 & -2 \\ -1/2 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

3) Résoudre le système : $\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3 \\ 2x_1 + 8x_2 + 12x_3 = 1 \\ 4x_1 + 16x_2 + 26x_3 = 0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7/2 & -2 \\ -1/2 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19/2 \\ -3/4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

CHANGEMENT DE BASE

Rappels :

Base : B = ($\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, ..., \mathbf{e_n}$) est une base d'un espace vectoriel EV ($\mathbb{C}^n$) ssi pour tout vecteur **V** de $\mathbb{C}^n$ il existe un n-uplet unique tel que :

$$V = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, e_i$$

Isomorphisme : $\mathbb{C}^n \rightarrow M_{n,1}(\mathbb{C})$

A tout vecteur V de $\mathbb{C}^n$, on peut associer la matrice colonne des coordonnées de V dans B :

$$M(V) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad V = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, e_i$$

Changement de base :

Soient B = ($\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, ..., \mathbf{e_n}$) et B' = ($\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, ..., \mathbf{e'_n}$) 2 bases de EV ("ancienne" et "nouvelle" bases).
Soient p_{lk} les coordonnées de $\mathbf{e_k'}$ dans l'ancienne base B.

On appelle "matrice de passage" de B→B' la matrice P=(p_{lk}) soit :

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1k} & \cdots & p_{n1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ p_{l1} & & p_{lk} & & p_{ln} \\ \vdots & & & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nk} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

$$e_k' = \sum_{l=1}^{n} p_{lk} \, e_k \quad \text{et} \quad e_k = \sum_{l=1}^{n} p'_{lk} \, e'_k$$

ATTENTION:
P agit à gauche car les vecteurs de base = bra

La matrice de passage de B'→B est la matrice P' =(p'_{lk}) inverse de P : $P' = P^{-1}$

Soit V un vecteur de EV de coordonnées ($x_1, x_2, ...x_n$) dans B et ($x'_1, x'_2, ..., x'_n$) dans B'.

On a $|x_1, x_2, ..., x_n\rangle = P\,|x'_1, x'_2, ..., x'_n\rangle$ et $|x'_1, x'_2, ..., x'_n\rangle = P^{-1}\,|x_1, x_2, ..., x_n\rangle$

MATRICES CARREES INVERSIBLES : CHANGEMENT DE BASE ET DIAGONALISATION

Objectif : **Trouver une nouvelle base B' = (e'$_1$, e'$_2$, ..., e'$_n$) dans laquelle une matrice A de forme quelconque dans la base B = (e$_1$, e$_2$, ..., e$_n$) devienne alors diagonale :**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_{j1} & & a_{jk} & & a_{jn} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & a_{jk} & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$B = \left(e_1, e_2, \cdots, e_n\right) \qquad B' = \left(e'_1, e'_2, \cdots, e'_n\right)$$

Définitions :

Soit A une matrice carrée d'ordre n. S'il existe 2 matrices carrés P et D telles que :

1) P est inversible
2) D est diagonale
3) A = P D P^{-1}

alors A est diagonalisable.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_{j1} & & a_{jk} & & a_{jn} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1k} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ p_{j1} & & p_{jk} & & p_{jn} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nk} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & d_{jk} & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'_{11} & \cdots & p'_{1k} & \cdots & p'_{n1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ p'_{l1} & & p'_{lk} & & p'_{ln} \\ \vdots & & & & \vdots \\ p'_{n1} & \cdots & p'_{nk} & \cdots & p'_{nn} \end{pmatrix}$$

A = P D P^{-1}

MATRICES CARREES INVERSIBLES : DIAGONALISATION

Soit D une matrice diagonale.
Les scalaires d_{11}, d_{22}, ..., d_{nn} sont les $\boxed{\text{"valeurs propres"}}$ de A.
Ce sont les racines du polynôme caractéristique :

$$P(\lambda) \equiv \mathrm{Det}(A - \lambda I) = 0 \quad \text{soit, } \forall \lambda \in \mathbb{C} : \; P(\lambda) = (\lambda - d_{11})(\lambda - d_{22})...(\lambda - d_{nn}) = 0$$

Multiplicité M de la valeur propre = multiplicité de la racine du polynôme.
M = 1 : « non dégénérée » M = k >1 : « k-fois dégénérée »

*** Si aucune valeur propre λ_j dégénérée :**
$\Rightarrow$ A peut être écrite de façon unique sous forme diagonale
(à une multiplication près de tous les λ_j par une même constante).

*** Si 1 valeur propre λ_j dégénérée avec 1 multiplicité M_j :**
$\Rightarrow$ A peut être écrite sous forme bloc-diagonale.
Bloc M_j*M_j = sous-espace vectoriel (SEV) propre associé à λ_j.
et $\exists$ choix infini de vecteurs de base V_j du SEV associés à λ_j

1er vecteur propre : choix libre d'une/plusieurs coordonnées
vecteurs propres suivants : doivent être orthogonaux aux précédents

Remarque : Les vecteurs propres sont toujours orthogonaux 2 à 2.

EXEMPLE : DIAGONALISATION DE $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Déterminer les valeurs propres λ_1 et λ_2 :

On calcule $Det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} Det(A - \lambda I) &= (1-\lambda)^2 - 2 \\ Det(A - \lambda I) &= \left(1-\sqrt{2}-\lambda\right)\left(1+\sqrt{2}-\lambda\right) \end{aligned}$

$\Rightarrow$ valeurs propres : $\begin{cases} \lambda_1 = \left(1-\sqrt{2}\right) \\ \lambda_2 = \left(1+\sqrt{2}\right) \end{cases}$ et $D = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$

2) Déterminer les vecteurs propres V_i associés :

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad d'où \quad \vec{V}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \quad \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

3) Déterminer les matrices de passage P et P^{-1} telles que $P\,D\,P^{-1} = A$:

$$P = \left(\left(\vec{V}_1\right)\left(\vec{V}_2\right)\right) \quad soit \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Inversion}} P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

DIAGONALISATION DE MATRICE : EXEMPLE (2)

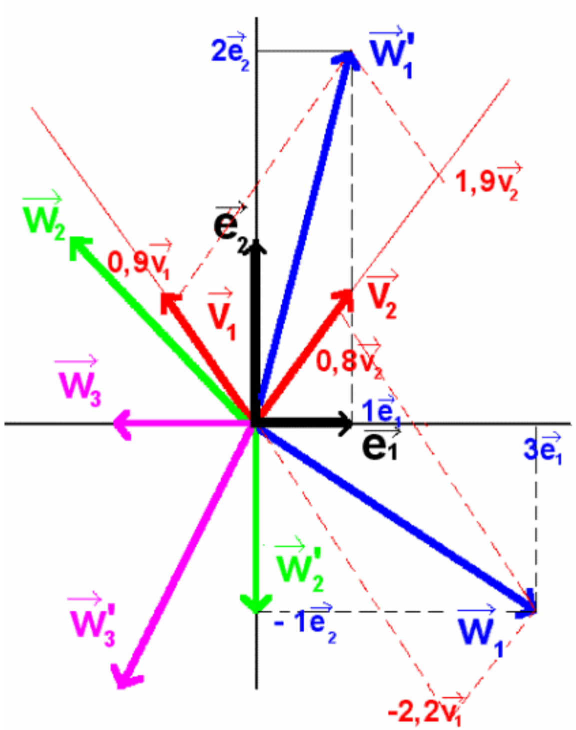
INTERPRETATION GEOMETRIQUE

A : Transformation de E dans E, K-linéaire et bijective (Isomorphisme)

A associe à tout vecteur ($\vec{W}$) de E un vecteur image ($\vec{W}'$)

$$Base \quad \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{V}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \vec{\vec{P}}.\vec{e}_1 \quad \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \vec{\vec{P}}.\vec{e}_2$$

$$Base \quad \{\vec{V}_1, \vec{V}_2\} \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \vec{\vec{P}}^{-1}.\vec{V}_1 \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \vec{\vec{P}}^{-1}.\vec{V}_2 \quad \vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



base 1	$\xrightarrow{P}$ / $\xleftarrow{P^{-1}}$	base 2
(3 -1)	$\vec{W}_1$	(-2,2 0,8)
	A ↓↑ A^{-1}	
(1 2)	$\vec{W}'_1$	(1,0 1,1)
(-2 1)	$\vec{W}_2$	(1,7 -0,3)
(0 -1)	$\vec{W}'_2$	(-1 -0,7)
(-1,5 0)	$\vec{W}_3$	(3/4 -3/4)
(1,5 -1,5)	$\vec{W}'_3$	(0 -2,1)

~~Conservation~~ des normes ⇒ ~~Isométrie~~

~~Conservation~~ des angles ⇒ ~~Similitude~~

$$Base \quad \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Base \quad \{\vec{V}_1, \vec{V}_2\} \qquad A = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

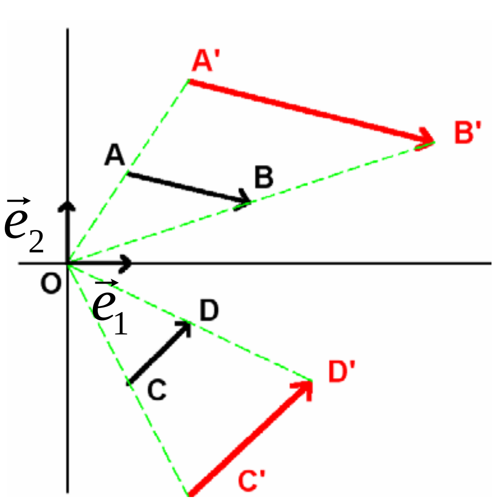
DIAGONALISATION DE MATRICE : EXEMPLE (3)

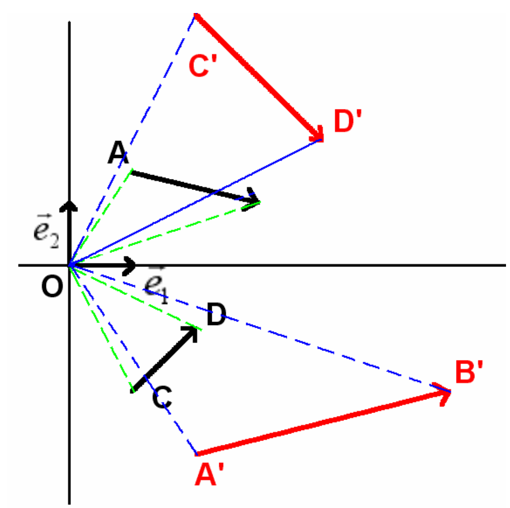
SIMILITUDE DE RAPPORT λ : bijection de E sur E multipliant les longueurs par λ .

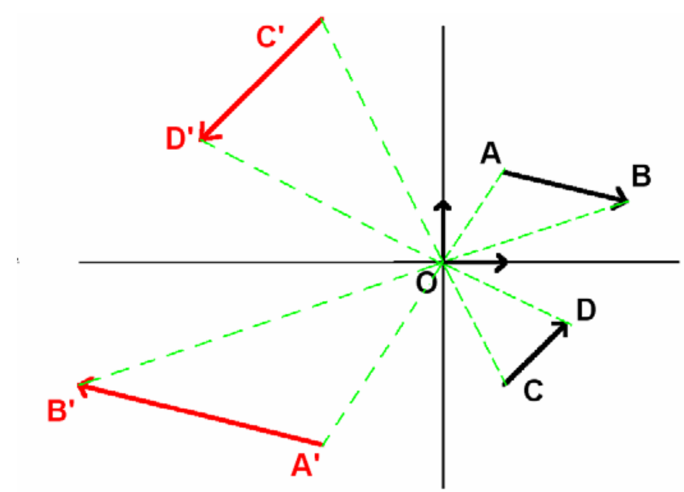
conservation des angles ⇒ | λ_1 | = | λ_2 | = ... = λ soit $\lambda_i = \pm \lambda$

Ex: plan Euclidien P (λ ≥0)

$$S_1(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} \qquad S_2(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & -\lambda\end{pmatrix} \qquad S_3(\lambda)=\begin{pmatrix}-\lambda & 0\\ 0 & -\lambda\end{pmatrix}$$







$$S_1(2)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} \qquad S_2(2)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix} \qquad S_3(2)=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

SIMILITUDE DE RAPPORT λ : $Det\left[S(\lambda)\right]=\pm\lambda^m$ (m dimensions)

EXEMPLE : DIAGONALISATION D'UNE MATRICE 3*3 INVERSIBLE (1)

1) Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -5 \\ 8 & 7 & -4 \\ -2 & 8 & -5 \end{pmatrix}$

2) Déterminer les vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_i, i=1,3
Calculer les matrices de passage P et P^{-1} telles que A = P D P^{-1}
avec D, forme diagonalisée de A.

1) Calcul de $Det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 5 & -5 \\ 8 & 7-\lambda & -4 \\ -2 & 8 & -5-\lambda \end{vmatrix}$

$$Det(A-\lambda I) = (4-\lambda)(7-\lambda)(-5-\lambda) - 320 + 40$$
$$-[10(7-\lambda) - 32(4-\lambda) + 40(-5-\lambda)]$$

$$Det(A-\lambda I) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 45\lambda - 162$$

EXEMPLE : DIAGONALISATION D'UNE MATRICE 3*3 INVERSIBLE (2)

Recherche des racines du polynôme caractéristique P(λ) = Det(A-λI)

$$Det(A-\lambda I) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 45\lambda - 162 = P(\lambda)$$

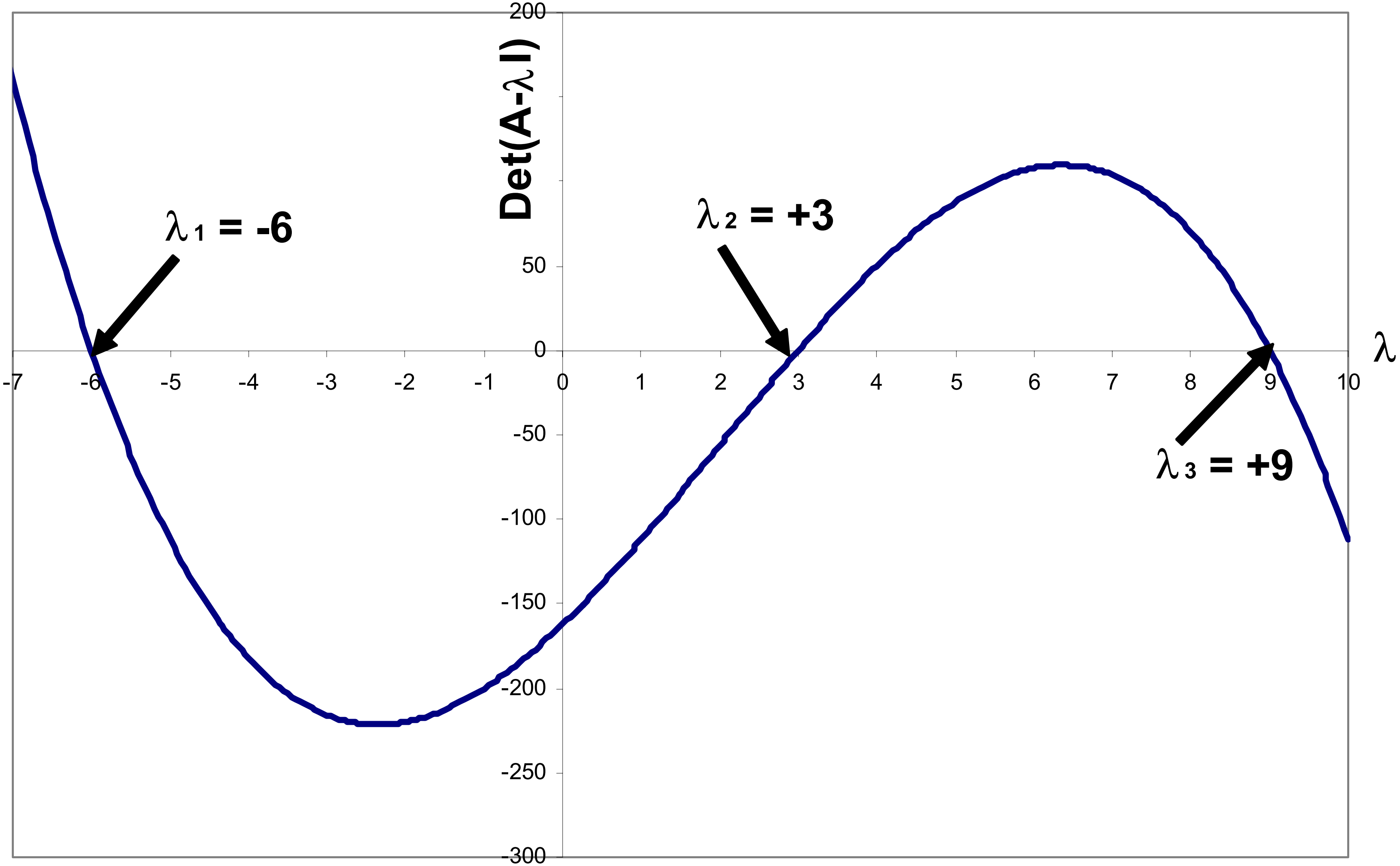
$\Rightarrow$ **Etude de la fonction P(λ) :** $P'(\lambda) = -3\lambda^2 + 12\lambda + 45$

$\Rightarrow$ **Recherche des racines λ_{rac1} et λ_{rac2}** $\Delta = 144 - 4(-3*45) = 684$

$$\lambda_{rac1/2} = \frac{-12 \pm \sqrt{684}}{-6}$$ **d'où** $\lambda_{rac1} = +6{,}359$ $\lambda_{rac2} = -2{,}358$

λ	$-\infty$	λ_1	λ_{rac1}	λ_2	λ_{rac2}	λ_3	$+\infty$
P'(λ)	$-\infty$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-\infty$
P (λ)	**+** ∞	**0**	**-221,637**	**0**	**+109,637**	**0**	**+** ∞

Recherche des valeurs propres λ_i



EXEMPLE : DIAGONALISATION D'UNE MATRICE 3*3 INVERSIBLE (4)

Recherche par dichotomie des racines de $P(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 45\lambda - 162$

$\boxed{\lambda_1 = -6{,}0 \quad \lambda_2 = +3{,}0 \quad \lambda_3 = +9{,}0}$ **(Précision : 10^{-1})**

$\Rightarrow$ **Diagonalisation de A :** $D = \begin{pmatrix} -6{,}0 & 0 & 0 \\ 0 & +3{,}0 & 0 \\ 0 & 0 & +9{,}0 \end{pmatrix}$

2) Recherche des vecteurs propres $\vec{V}_i$ associés aux λ_i

vecteur propre $\vec{V}_1$ associé à λ_1 :

on a $A.\vec{v}_1 = \lambda_1 \, \vec{v}_1$ **soit** $(A - \lambda_1 I).\vec{v}_1 = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 4-(-6) & 5 & -5 \\ 8 & 7-(-6) & -4 \\ -2 & 8 & -5-(-6) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 0 \\ 8x_1 + 13x_2 - 4x_3 = 0 \\ -2x_1 + 8x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Résolution : Inversion de matrice ...

EXEMPLE : DIAGONALISATION D'UNE MATRICE 3*3 INVERSIBLE (5)

on trouve $\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 0 \\ 8x_1 + 13x_2 - 4x_3 = 0 \\ -2x_1 + 8x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases}$ **soit** $\boxed{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}$

$\vec{V}_2$ **associé à λ_2 ,**

$$\begin{cases} 1x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 0 \\ 8x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0 \\ -2x_1 + 8x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$\vec{V}_3$ **associé à λ_3**

$$\begin{cases} -5x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 0 \\ 8x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ -2x_1 + 8x_2 - 14x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

d'où les matrices de changement de base P et P^{-1} tq. **A = P D P^{-1}**

$$P = \left(\left(\vec{v}_1\right) \quad \left(\vec{v}_2\right) \quad \left(\vec{v}_3\right) \right)$$

$$P = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{\textbf{Inversion}} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -4/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

APPLICATION :

Propriétés anisotrope des cristaux et des roches

- propagation des ondes
  - tenseur des indices (cristaux)
  - ondes acoustiques /phonons
- déformation
- compressibilité
- ...

et Statistiques ... !