

MODULE LSM.3.053

“Mathématiques appliquées aux Sciences de la Terre 1 »

I Fonctions élémentaires

- a) Fonctions réelles à 1 variable – Rappels généraux
- b) Fonctions réelles à 2, 3 variables – Coordonnées polaires et sphériques
- c) Fonctions polynomiales et géométrie cartésienne
- d) Fonctions complexes – Vecteurs de \mathbb{R}^2 – Vecteurs de \mathbb{R}^n

II Suites et Séries : Mathématiques numériques

- a) Suites
- b) Séries Σ – Développement en séries de puissances et séries de Fourier
- c) Séries Π - Exemples

III Intégration

- a) Primitives et intégrales de fonctions réelles à 1 variable – Rappels généraux
- b) Primitives remarquables : méthode de calcul analytique
- c) Evaluation numérique des primitives
- d) Exemples

IV Equations différentielles

- a) Dérivée de fonctions usuelles à 1 variable – Rappels généraux
- b) Dérivées partielles (coordonnées cartésiennes, polaire, sphériques)
- c) Equation différentielle de 1^{er} ordre - Exemples
- d) Equation différentielle de 2^{ème} ordre
- e) Système d'équations différentielles

SUITES ET SERIES : MATHEMATIQUES NUMERIQUES

OBJECTIF : TRAITEMENT DE PROBLÈMES MATHÉMATIQUES PAR L'INFORMATIQUE

Informatique :

Ne gère que des entiers

Opérations limités à +,- et *,/

Problèmes mathématiques :

Résolution d'équations à n variables

Résolution d'équations différentielles

Modélisation de systèmes (évolution)

→ Fonctions analytiques

**Traitement analytique des problèmes → Quelques fonctions,
Equations simples**

Traitement numérique : Approximations, Convergence

MODULE LSM.3.053

“Mathématiques appliquées aux Sciences de la Terre 1 »

I Fonctions élémentaires

- a) Fonctions réelles à 1 variable – Rappels généraux**
- b) Fonctions réelles à 2, 3 variables – Coordonnées polaires et sphériques**
- c) Fonctions polynomiales et géométrie cartésienne**
- d) Fonctions complexes**

II Suites et Séries : Mathématiques numériques

- a) Suites**
- b) Séries Σ – Développement en séries de puissances et séries de Fourier**
- c) Séries Π - Exemples**

III Intégration

- a) Primitives et intégrales de fonctions réelles à 1 variable – Rappels généraux**
- b) Primitives remarquables : méthode de calcul analytique**
- c) Evaluation numérique des primitives**
- d) Exemples**

IV Equations différentielles

- a) Dérivée de fonctions usuelles à 1 variable – Rappels généraux**
- b) Dérivées partielles (coordonnées cartésiennes, polaire, sphériques)**
- c) Equation différentielle de 1^{er} ordre - Exemples**
- d) Equation différentielle de 2^{ème} ordre**
- e) Système d'équations différentielles**

I.a) PROPRIETES GENERALES DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE

Soit une fonction à valeurs réelles $y = f(x)$ assignant N réels y à un réel x
 $N = 1$: Fonction uniforme (défaut) $N > 1$ Fonction multiforme

Domaine de définition $D(f)$:

Ensemble de tous les x pour lesquels l'assignement est défini.

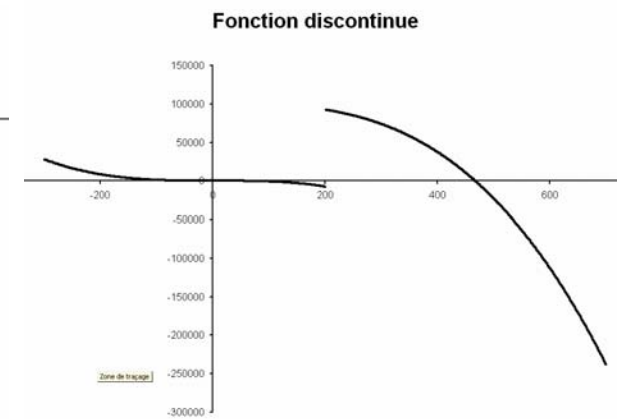
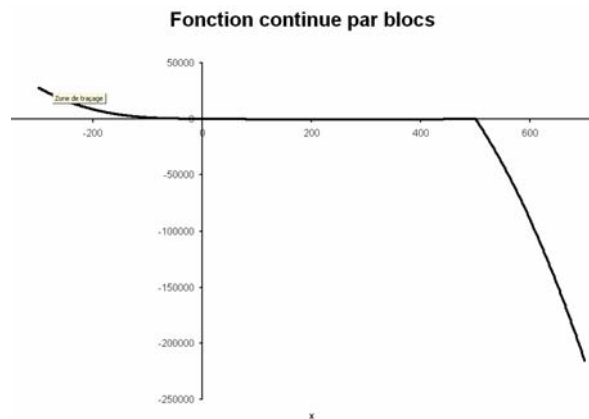
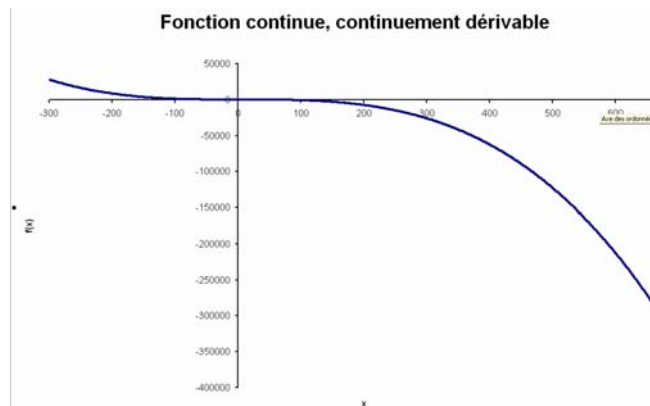
Image :

Ensemble des points images y pour tous les x du domaine de définition $D(f)$.

Continuité :

La fonction $f(x)$ est continue au point x si pour tout x du domaine de définition

$D(f)$, on a $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x + \varepsilon) - f(x) = 0$



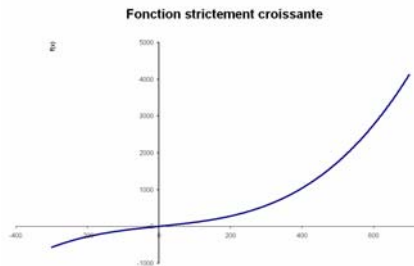
Continuité → Interpolation, Séries de Fourier

I.a) PROPRIETES GENERALES DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE

Soit une fonction à valeurs réelles $y = f(x)$ assignant un unique réel y à un réel x

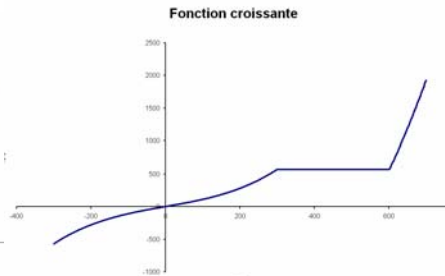
Variations :

**Absolument
Croissante**



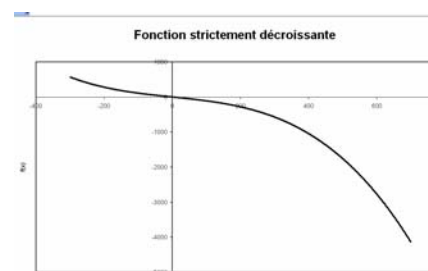
$$\forall x, u \in D(f), \\ x > u \Rightarrow f(x) > f(u)$$

Croissante



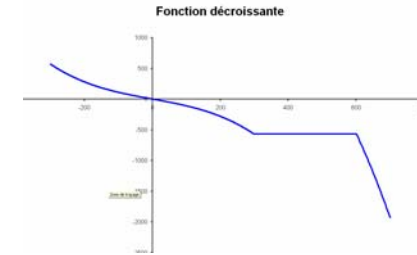
$$\forall x, u \in D(f), \\ x > u \Rightarrow f(x) \geq f(u)$$

**Absolument
Décroissante**



$$\forall x, u \in D(f), \\ x > u \Rightarrow f(x) < f(u)$$

Décroissante

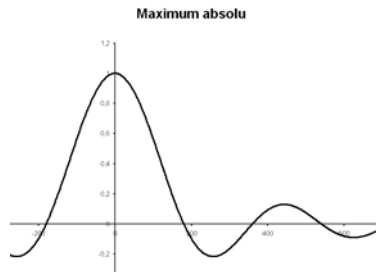


$$\forall x, u \in D(f), \\ x > u \Rightarrow f(x) \leq f(u)$$

Variations d'une fonction → Convergence des séries

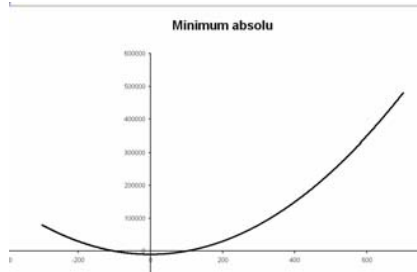
Extremum (minimum, maximum) :

**Maximum
Absolu**



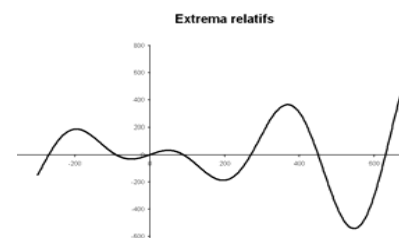
$$\forall x_{\max}, u \in D(f), \\ f(x_{\max}) > f(u)$$

**Minimum
Absolu**



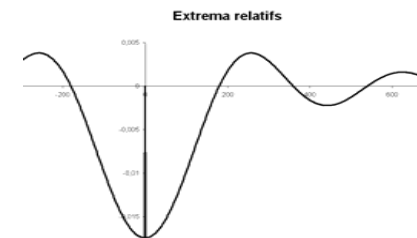
$$\forall x_{\min}, u \in D(f), \\ f(x_{\min}) < f(u)$$

**Maximum
Local**



$$\varepsilon \in \mathbb{R}^*, (x, (x+\varepsilon)) \in D(f), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x) - f(x+\varepsilon) > 0$$

**Minimum
Local**



$$\varepsilon \in \mathbb{R}^*, (x, (x+\varepsilon)) \in D(f), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x) - f(x+\varepsilon) < 0$$

Recherche du minimum → Fonctions de coût, Moindres carrés

I.a) PROPRIETES GENERALES DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE

Soit une fonction à valeurs réelles $y = f(x)$ assignant un unique réel y à un réel x

Parité :

Une fonction est paire si $\forall x \in D(f), f(x) = f(-x)$

Imparité :

Une fonction est impaire si $\forall x \in D(f), f(x) = -f(-x)$

Périodicité :

Une fonction $f(x)$ est périodique de période T si

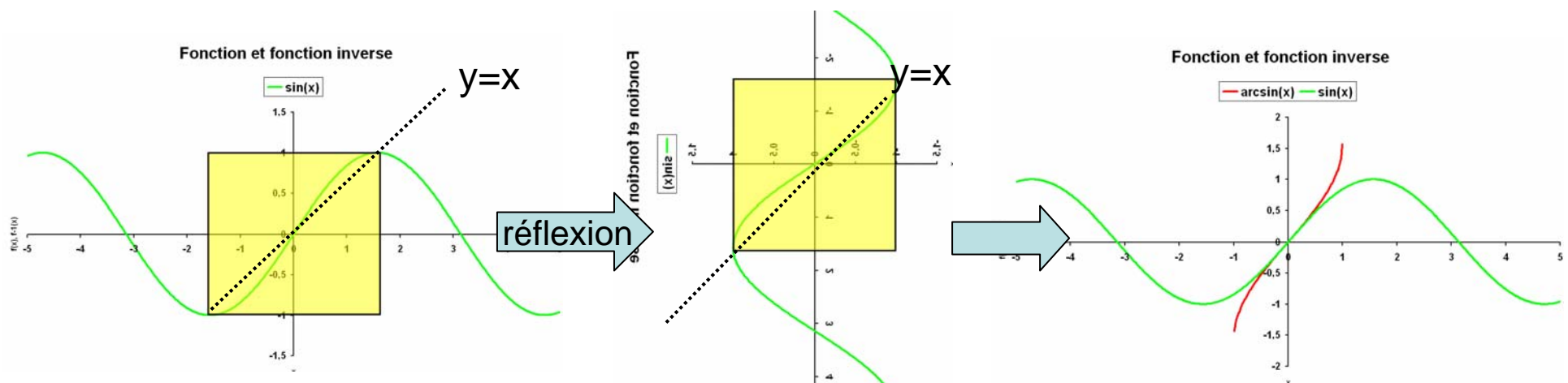
$$\forall x \in D(f), \forall n \in \mathbb{N} / x + nT \in D(f), f(x + nT) = f(x)$$

Méthodes numériques
 \Downarrow
 Simplification des calculs
 Décomposition de Fourier

Fonction inverse f^{-1} :

Définie sur les sous-domaines D' de D où pour tout $y=f(x)$ correspond 1 seule valeur de x .

On a alors : $\forall x \in D', f^{-1}(y) \equiv f^{-1}(f(x)) = x$



ATTENTION : Domaine de définition (parfois non unique \rightarrow conventions)

I.a) CLASSIFICATION DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE

FONCTIONS DE BASE

- Définition explicite : x^n ($n \in \mathbb{N}$)
- Limites de suites : e^x ,
- Fonctions inverses : $\ln(x)$,
- Fonctions dérivées : a^x , $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\sinh(x)$, $\cosh(x)$, $\tanh(x)$, $\text{sinc}(x)$
 $\log_a(x)$, $\text{asin}(x)$, $\text{acos}(x)$, $\text{atan}(x)$, $\text{asinh}(x)$, $\text{acosh}(x)$, $\text{atanh}(x)$

FONCTIONS EXPLICITES DE FONCTIONS DE BASE

- Exemple : $f(x) = \sin(2^x * \tan(2x^2 + 3x + 12)^3)$

FONCTIONS NON EXPLICITES (SOLUTION D'UNE EQUATION)

- Equation Différentielle : Fonctions de Bessel, ...
- Limite de suite numérique

MATHEMATIQUES NUMERIQUES (cf. « Séries »):

Toutes les fonctions usuelles s'expriment à partir de la fonction $y=x^n$!!!
(avec $x^n = x * x * \dots * x$) grâce à des suites/séries

→ Toutes les fonctions s'approximent à partir des opérateurs élémentaires + et *

→ OPERATIONS ELEMENTAIRES INFORMATIQUES !!!

LSM3.053 : Mathématiques ET Informatique pour les Sciences de la Terre

I.a) FONCTIONS DE BASE D'UNE VARIABLE

FONCTION PUISSANCE

• Définition

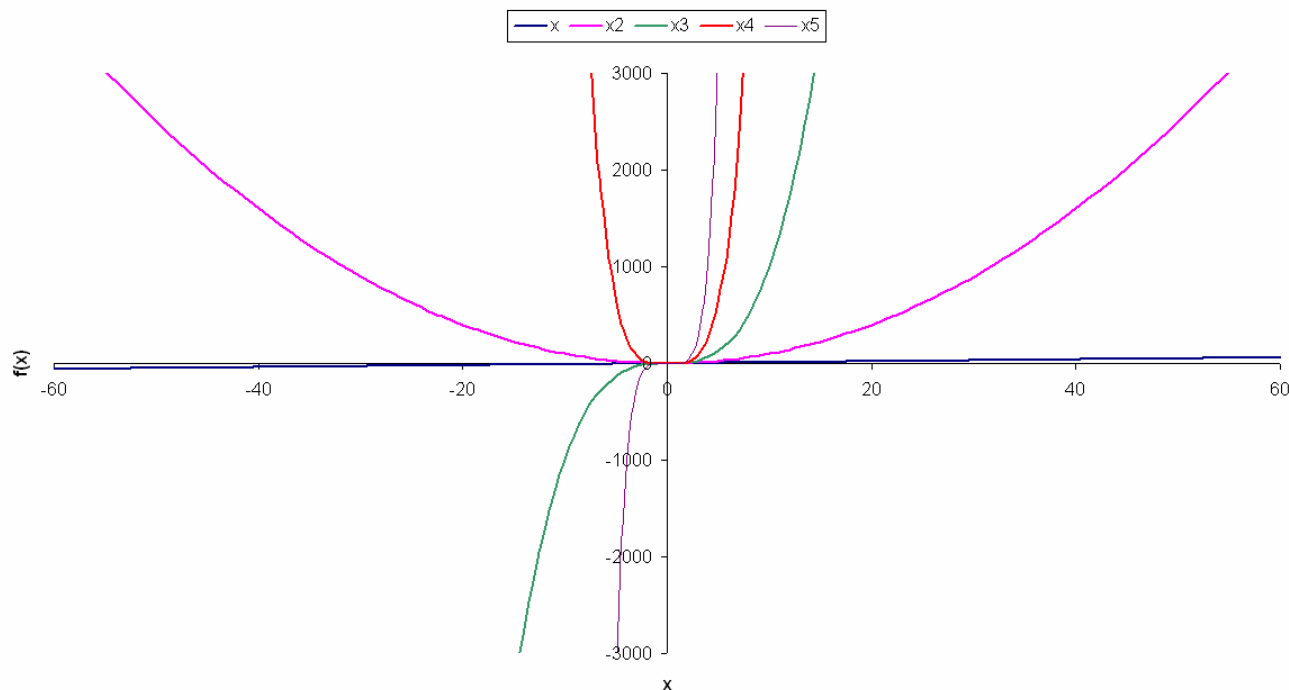
$$\forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^* : x^n = \underbrace{x * x * x * \dots * x}_{n \text{ fois}} ; \quad x^0 = 1$$

• Propriétés

$$k \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2k} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2k} = +\infty \quad \text{et} \quad \text{fonction paire}$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2k+1} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2k+1} = +\infty \quad \text{et} \quad \text{fonction impaire}$$

$$k, m \in \mathbb{N}^*, \quad x^m * x^n = x^{m+n}$$

Fonctions x^n



I.a) FONCTIONS DE BASE D'UNE VARIABLE

FONCTION EXPONENTIELLE (FONCTION D'EULER) $y=e^x$

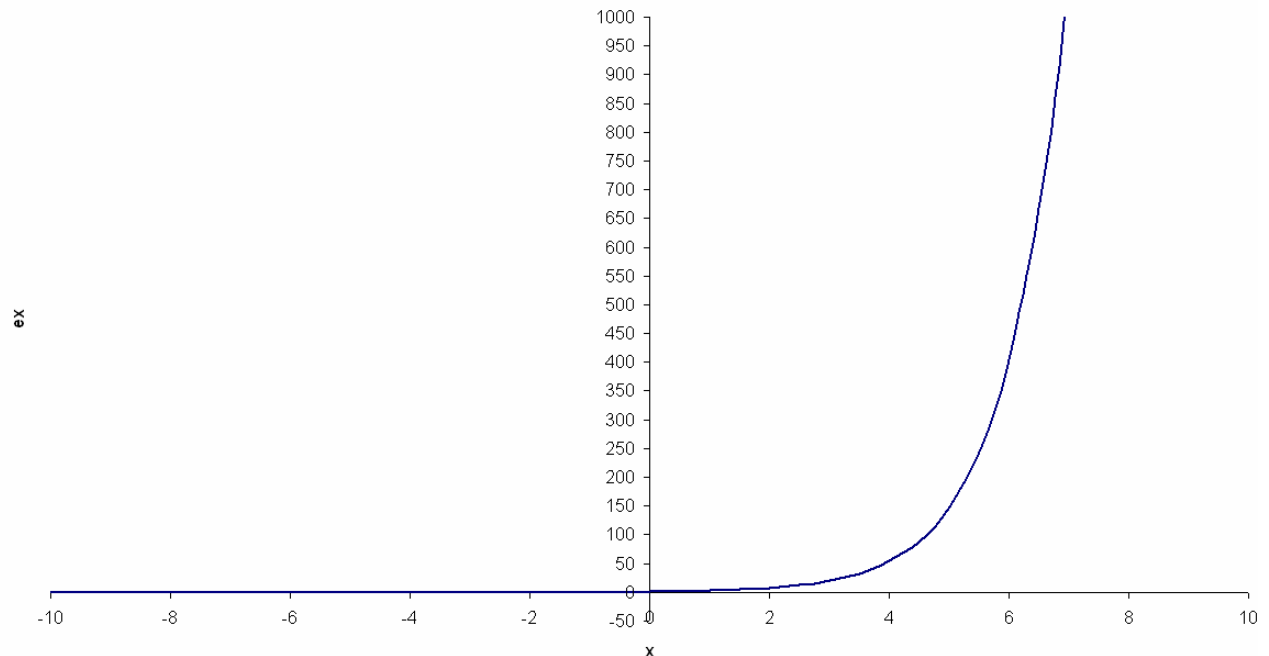
•Définition (Limite de suite): $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{ou} \quad e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

•Propriétés $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

$$\forall x \in \mathbb{R}: \underbrace{e^x * e^x * e^x * \dots * e^x}_{n \text{ fois}} = e^{nx} \quad ; \quad \frac{1}{\underbrace{e^x * e^x * e^x * \dots * e^x}_{n \text{ fois}}} = e^{-nx}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad e^x e^y = e^{xy} \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

Fonction exponentielle e^x



I.a) FONCTIONS DE BASE D'UNE VARIABLE

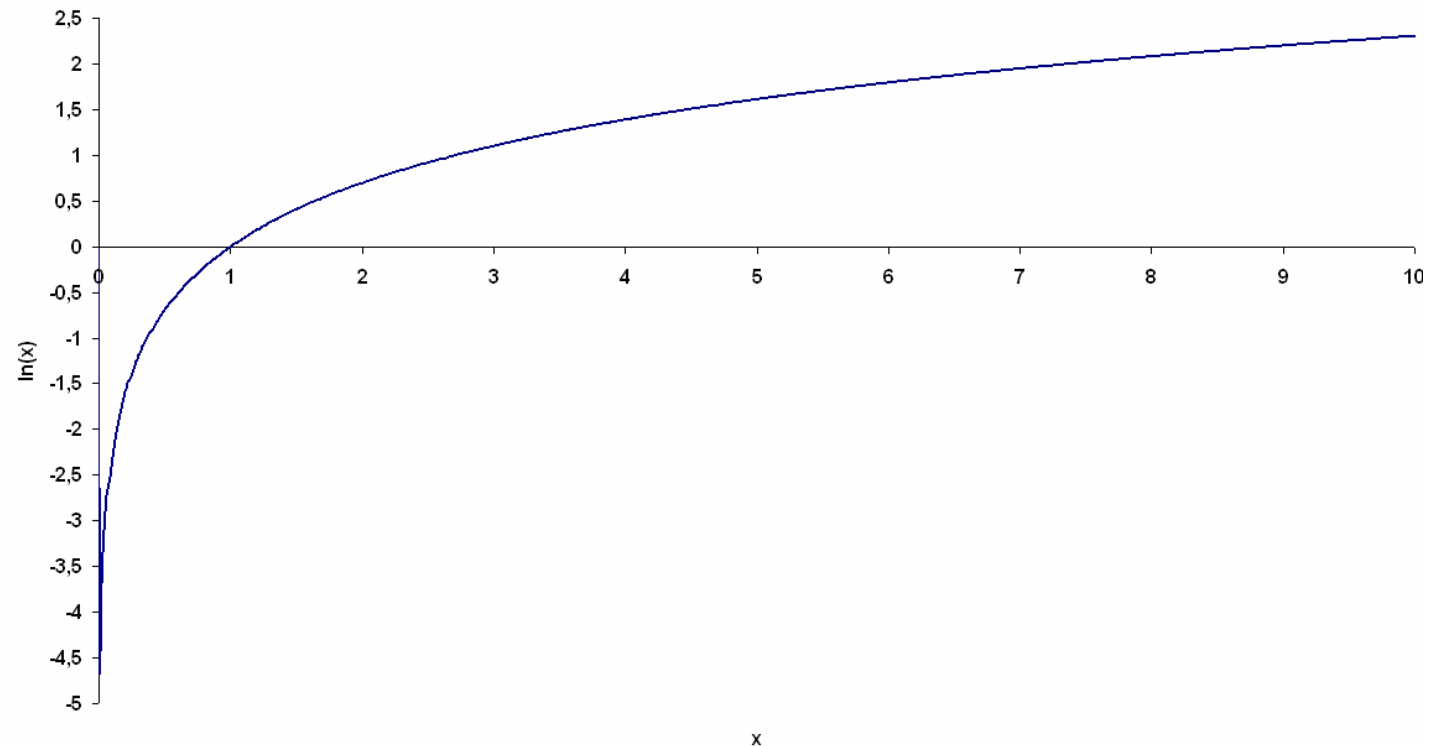
FONCTION LOGARITHME (LOGARITHME NÉPERIEN) $y=\ln(x)$:

• Définition (fonction inverse de e^x) : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad y = \ln(x) \Rightarrow x = e^y$

• Propriétés : $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*} \quad \ln(x) + \ln(y) = \ln(x * y)$$

Logarithme néperien $\ln(x)$



I.a) FONCTIONS DE BASE D'UNE VARIABLE

FONCTION EXPONENTIELLE GENERALISEE a^x :

• Définition (fonction dérivée de e^x) : $\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R} \quad a^x \equiv e^{x \ln a}$

• Propriétés :

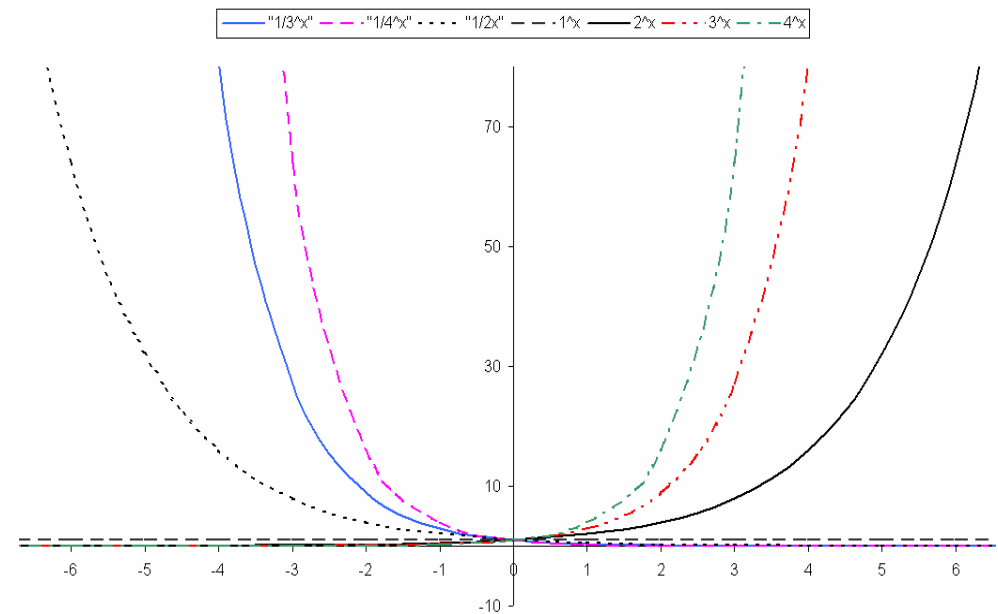
$$\begin{array}{ll}
 0 < a < 1: & \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0 \\
 a = 1: & a^x \equiv 1 \\
 1 < a : & \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 & \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \forall a, b \in \mathbb{R}^+, \forall x, y \in \mathbb{R} \\
 a^x a^y = a^{x+y} \quad (a^x)^y = a^{xy} \\
 (ab)^x = a^x b^x \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \frac{a^x}{b^x}
 \end{array}$$

NOTATIONS PARTICULIERES

$$\begin{array}{lll}
 a^0 = 1 & a^1 = a & a^2 = a * a \\
 a^{1/2} = \sqrt{a} & a^{1/3} = \sqrt[3]{a} & a^{1/n} = \sqrt[n]{a}
 \end{array}$$

Exponentielle généralisée



I.a) FONCTIONS DE BASE D'UNE VARIABLE

FONCTION LOGARITHME GENERALISE $\log_a(x)$:

• Définition (fonction inverse de a^x) :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad y = \log_a(x) \Rightarrow x = a^y$$

(fonction dérivée de $\ln(x)$):

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \forall a \in \mathbb{R}^+ / a \neq 1 \quad \log_a(x) \equiv \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

• Propriétés :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_a(x) = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = +\infty$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+, \quad \forall a \in \mathbb{R}^+$$

$$\log_a a = 1$$

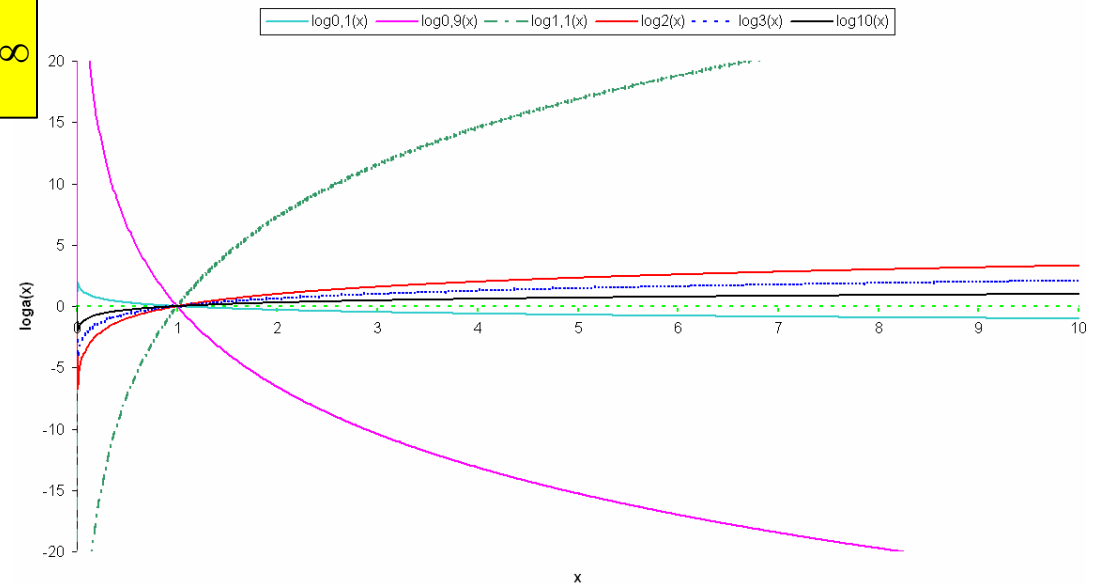
$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a y^x = x \log_a y$$

Logarithme généralisé



• Application :

• $\log_e(x) = \ln(x)$: Radioactivité, Atténuation

• $\log_{10}(x)$: pH

I.a) FONCTIONS DE BASE D'UNE VARIABLE

FONCTIONS CIRCULAIRES $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\cotan(x)$:

• Définition (Fonctions dérivées de e^x):

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (\text{Formule de Moivre}) \quad \text{soit} \quad e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} / \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{2} \right\} \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R} / \left\{ (2n)\frac{\pi}{2} \right\} \quad \cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$



• Propriétés :

$\sin(x)$: 2π - périodique, impaire, bornée ($-1 \leq \sin(x) \leq 1$)

$\cos(x)$: 2π - périodique, paire, bornée ($-1 \leq \cos(x) \leq 1$)

$\tan(x)$: π - périodique, impaire

$\cotan(x)$: π - périodique, impaire

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$$

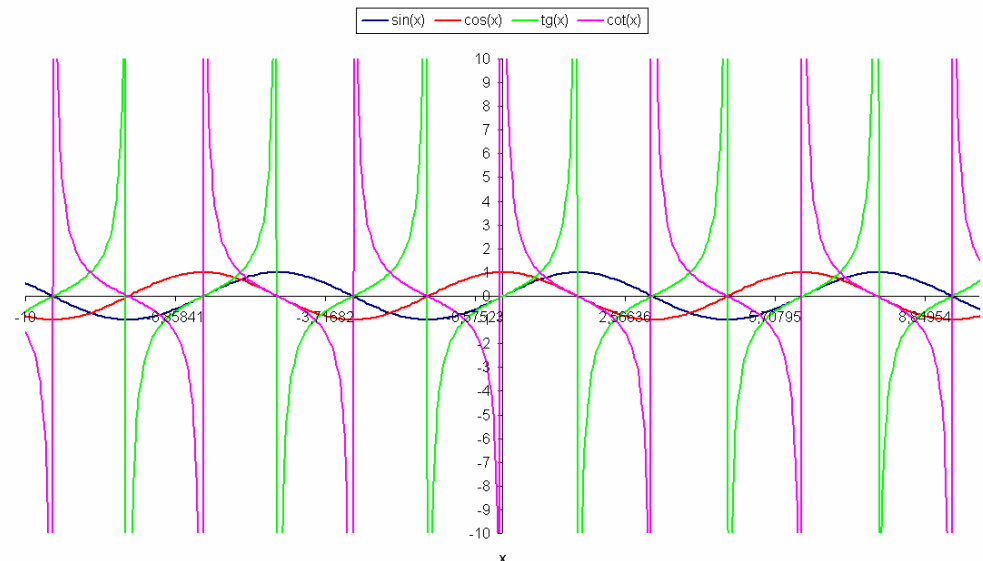
$\tan(x)$: croissante, discontinue :

$$\lim_{x \rightarrow (2n+1)\frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow (2n+1)\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$$

$\cotan(x)$: décroissante, discontinue :

$$\lim_{x \rightarrow (2n)\frac{\pi}{2}^-} \cotan(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow (2n)\frac{\pi}{2}^+} \cotan(x) = +\infty$$

Fonctions circulaires



I.a) FONCTIONS DE BASE D'UNE VARIABLE

FONCTIONS CIRCULAIRES $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\cotan(x)$:

• Relations à connaître

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(x)$	$\sqrt{0/2}$	$\sqrt{1/2}$	$\sqrt{2/2}$	$\sqrt{3/2}$	$\sqrt{4/2}$
$\cos(x)$	$\sqrt{4/2}$	$\sqrt{3/2}$	$\sqrt{2/2}$	$\sqrt{1/2}$	$\sqrt{0/2}$
$\tan(x)$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cotan(x)$	∞	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0



$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$



$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \quad \cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin(x) \quad \cos(x + \pi) = -\cos(x)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

I.a) FONCTIONS DE BASE D'UNE VARIABLE

FONCTIONS HYPERBOLIQUES $\sinh(x)$, $\cosh(x)$, $\tanh(x)$, $\cotanh(x)$:

• Définition (Fonctions dérivées de e^x):

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{soit} \quad e^x = \cosh(x) + \sinh(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}, \quad \cotanh(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{1}{\tanh(x)}$$



• Propriétés :

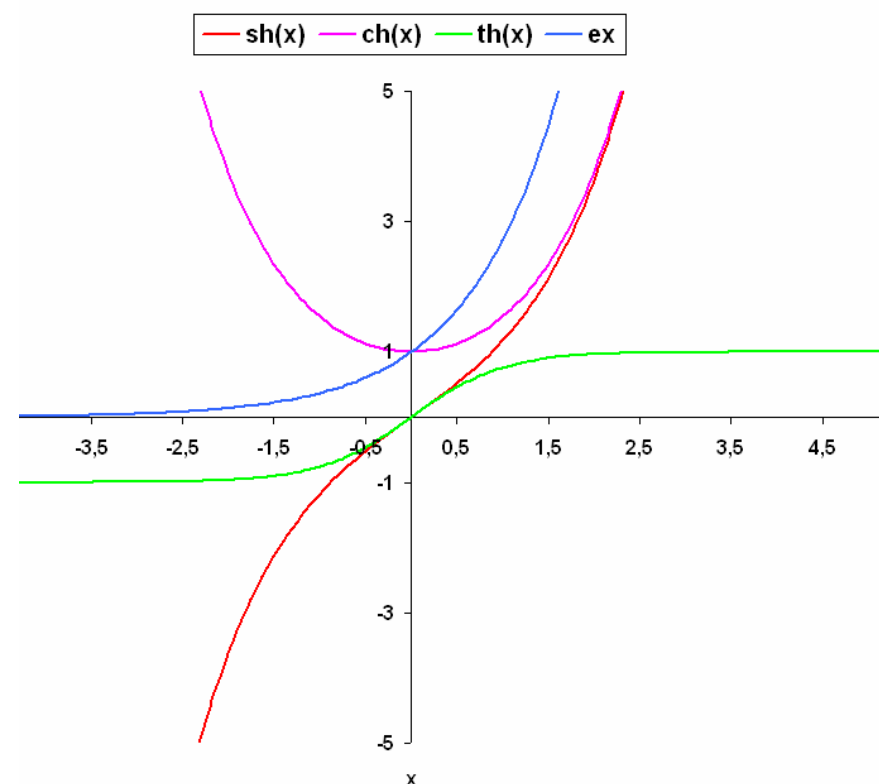
$$\begin{aligned} \cosh(x) : \text{paire} & \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \cosh(x) = \cosh(-x) \\ \sinh(x) : \text{impaire} & \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \sinh(x) = -\sinh(-x) \\ \tanh(x) : \text{impaire} & \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \tanh(x) = -\tanh(-x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tanh(x) : \text{bornée} : & \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq \tanh(x) \leq 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh(x) = -1 & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh(x) = +1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sinh(x) : \text{uniformément croissante} : \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh(x) = -\infty & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh(x) = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cosh(x) : \text{semibornée} : \quad \text{Min}[\cosh(x)] = 1 = \cosh(0) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh(x) = +\infty & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh(x) = +\infty \end{aligned}$$

Fonctions hyperboliques

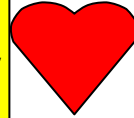


I.a) FONCTIONS DE BASE D'UNE VARIABLE

FONCTIONS CIRCULAIRES RECIPROQUES arcsin(x), arccos(x), arctan(x) :

•Définition (Fonctions inverses, branche principale):

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1, 1] \quad x = \sin(y) &\Rightarrow y = \arcsin(x) + 2k\pi \\ \forall x \in [-1, 1] \quad x = \cos(y) &\Rightarrow y = \pm \arccos(x) + 2k\pi \\ \forall x \in [-\infty, +\infty] \quad x = \tan(y) &\Rightarrow y = \arctan(x) + k\pi \end{aligned}$$



**ATTENTION
A LA PERIODICITE
ET AUX BORNES !**

•Propriétés :

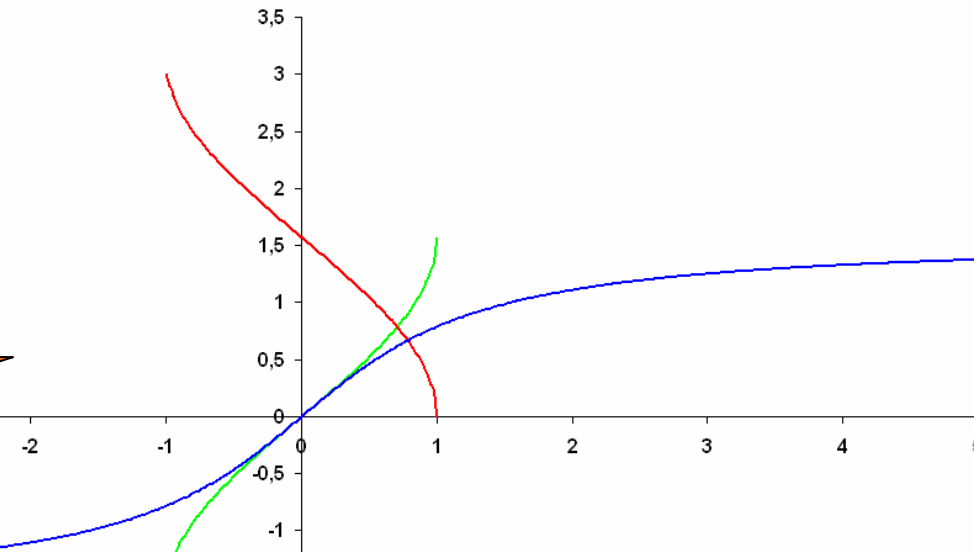
$\arcsin(x)$: impaire

$$\arcsin(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(x)$$

$$\arcsin(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

Fonctions circulaires réciproques

— arcsin(x) — arccos(x) — arctg(x)



•Branche principale

$$-\pi \leq \text{Arc sin}(x) < \pi$$

$$0 \leq \text{Arc cos}(x) < 2\pi$$

$$-\pi \leq \text{Arc tan}(x) < \pi$$



Exercice : Montrer que $\arcsin(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(x)$, $\arcsin(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

I.a) FONCTIONS DE BASE D'UNE VARIABLE

FONCTIONS HYPERBOLIQUES RECIPROQUES $\operatorname{arcsinh}(x)$, $\operatorname{arccosh}(x)$, $\operatorname{arctanh}(x)$:

• **Définition (Fonctions inverses):**

$$\forall x \in [-\infty, +\infty] \quad x = \sinh(y) \Rightarrow y = \operatorname{arcsinh}(x)$$

$$\forall x \in [1, +\infty] \quad x = \cosh(y) \Rightarrow y = \pm \operatorname{arccosh}(x)$$

$$\forall x \in [-1, +1] \quad x = \tanh(y) \Rightarrow y = \operatorname{arctanh}(x)$$

**ATTENTION
AUX BORNES !**



Fonctions Hyperboliques inverses

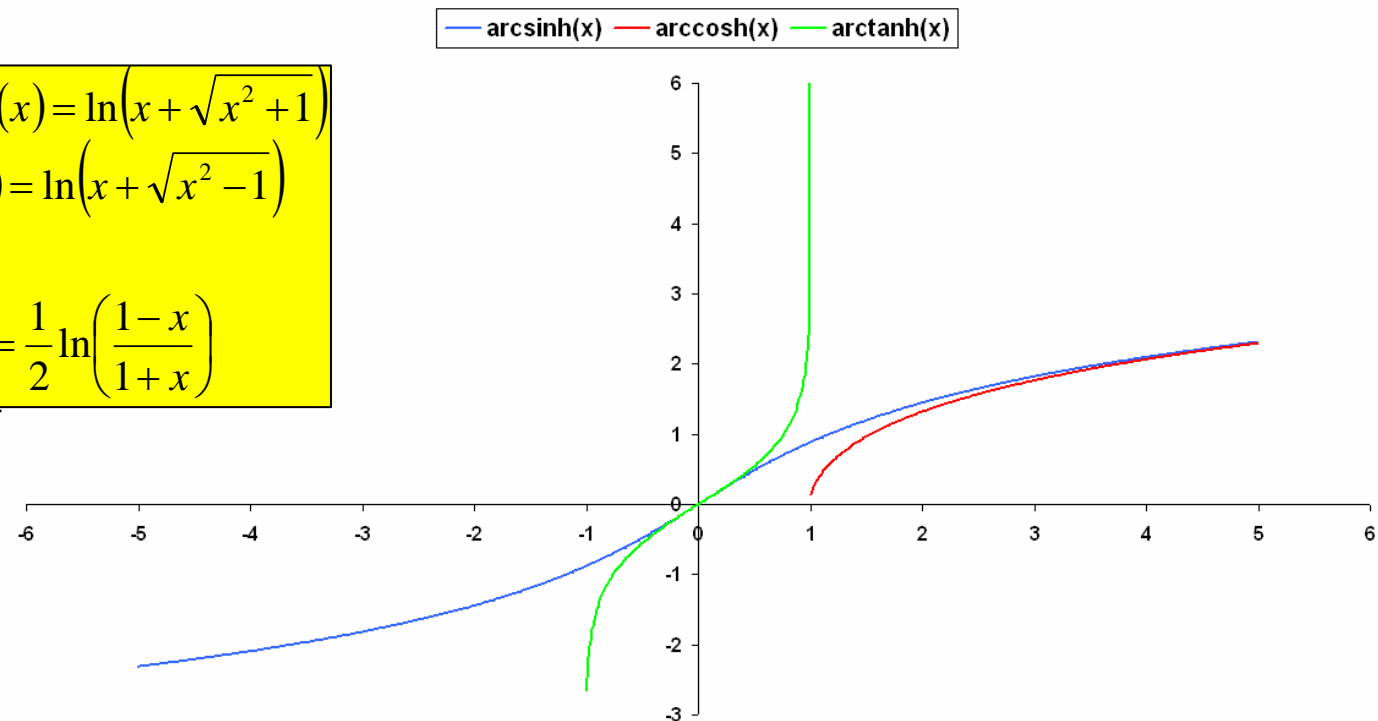
• **Propriétés :**

$$\forall x \in [-\infty, +\infty] \quad \operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\forall x \in [1, +\infty] \quad \operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$\operatorname{arctanh}(x)$: impaire

$$\forall x \in [-1, +1] \quad \operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$



Exercice : Montrer que $\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $\operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $\operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

I.a) DOMAINES D'APPLICATION DES FONCTIONS

Les « domaines d'application » des fonctions réelles:

- $e^x, \ln(x)$:
Décroissance d'une population (radioactivité, chimie, biologie)
Absorption d'une onde dans 1 milieu
Diffusion, Transfert de matière (Fick)
- $\ln(x)$:
Statistiques
- $10^x, \log(x)$:
pH, pK (Chimie)
- $\sin(x), \cos(x)$:
Propagation des ondes
(acoustique → sismique, optique → biréfringence)
Transfert de chaleur (Fourier)
- $\operatorname{arcsinh}(x)$
• $\operatorname{arcosh}(x)$:
Calcul intégral
- polynôme :
Modélisation numérique de fonctions complexes
Tenseur (rang n)

I.a) FONCTIONS EXPLICITES DE FONCTIONS

Quelques fonctions remarquables:

- \exists une infinité de fonctions dérivées
- Seulement quelques fonctions particulièrement intéressantes \rightarrow dénomination

- Polynômes : $y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

- Fonctions rationnelles : $y(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n}$

- Gaussienne : $G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k^2}} e^{-(x-a)^2/2k^2}$

- Sinus cardinal : $\sin c(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

- Fonction erreur : $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$

I.a) FONCTIONS DEFINIES PAR DES EQUATIONS

Exemple (pour les curieux) :

$$x^2 f''(x) + x f'(x) + (x^2 - a^2) f(x) = 0 \quad \rightarrow \quad I_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(p+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}$$

avec $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad \dots \quad \text{Intégration non analytique elle-même !!!}$

∃ une expression analytique générale + des expressions tabulés
(fonctions spéciales Γ, β d'Euler, fonctions I_n, J_n, \dots de Bessel)

Très difficiles à manipuler

Hors programme (LSM.3.053) et suite ...

I.b) FONCTIONS DE 2 VARIABLES

•MÊMES FONCTIONS DE BASE QU'À 1 DIMENSION.

Exemple : $f(x, y) = \arcsin y + \ln(2x + \sqrt{y^2 + 1})$ $g(x, y) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-x}{1+y}\right)$

Cas particulier : Polynômes de degré n (Courbes algébriques de degré n)

$n = 1 \quad \rightarrow a_{10} x + a_{01} y + a_{00} = \text{cte}$

$n = 2 \quad \rightarrow a_{20} x^2 + a_{02} y^2 + a_{11} xy + a_{10} x + a_{01} y + a_{00} = \text{cte}$

$n = 3 \quad \rightarrow a_{30} x^3 + a_{03} y^3 + a_{21} x^2 y + a_{12} xy^2$
 $\quad \quad \quad + a_{20} x^2 + a_{02} y^2 + a_{11} xy + a_{10} x + a_{01} y + a_{00} = \text{cte}$

$n \quad \rightarrow a_{n0} x^n + a_{0n} y^n + a_{n-1,1} x^{n-1} y + \dots$
 $\quad \quad \quad + a_{20} x^2 + a_{02} y^2 + a_{11} xy + a_{10} x + a_{01} y + a_{00} = \text{cte}$

(Un des termes $a_{i,j}$ tel que $i+j=n$ non nul)

•VARIABLES CONJUGUEES / SEPREES

Fonctions à variables conjuguées (Cas général)

$$f(x, y) = \arcsin y + \ln(2x + \sqrt{y^2 + 1})$$

Fonctions à variables séparées (Cas particulier)

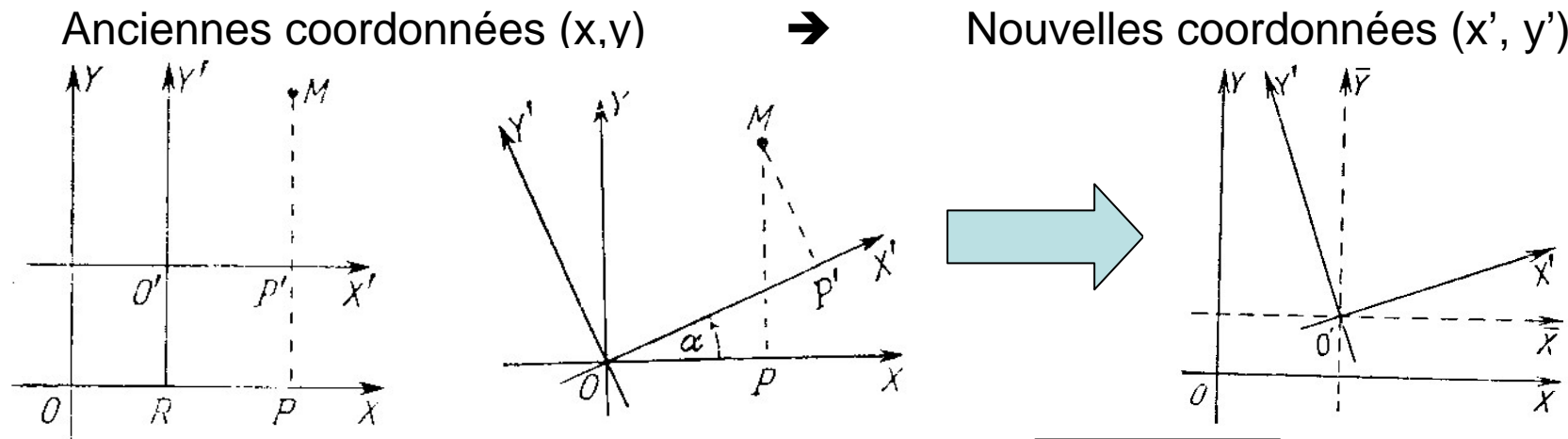
On peut réécrire la fonction sous forme d'une somme de 2 blocs ne faisant intervenir chacun que l'une des 2 variables

\rightarrow Simplification pour la dérivation, l'intégration ...

$$g(x, y) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-x}{1+y}\right) \Leftrightarrow g(x, y) = \frac{1}{2} \ln(1-x) - \frac{1}{2} \ln(1+y)$$

I.b) FONCTIONS DE 2 VARIABLES

• TRANSFORMATION DES COORDONNEES CARTESIENNES (« Chgt de base », EV)



- Translation de l'origine

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x + x_0 = x \\ y + y_0 = y \end{cases}$$

- Rotation des axes

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

- Dilatation/contraction des axes (Nouveau repère non cartésien → Chgt de base):

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = \frac{1}{a} x' \\ y = \frac{1}{b} y' \end{cases}$$

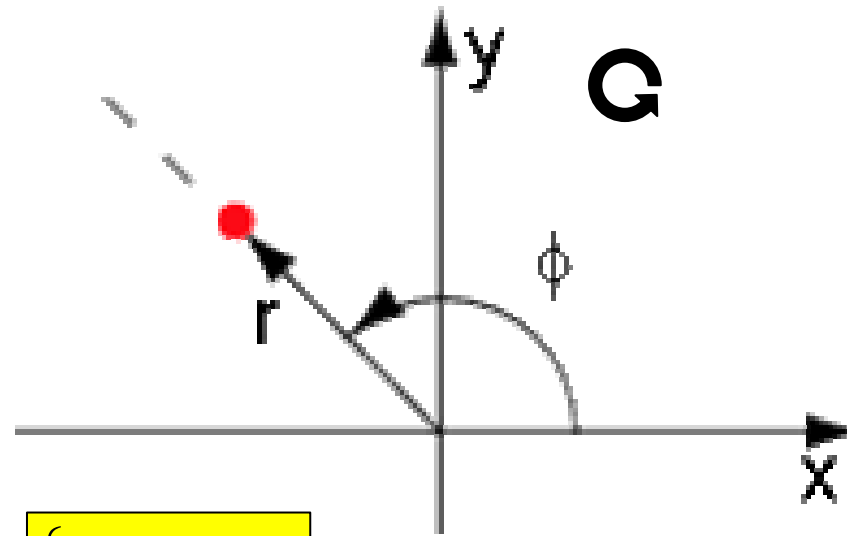
L'ordre dans lequel on effectue les transformations de rotation et translation n'importe pas

I.b) FONCTIONS DE 2 VARIABLES

COORDONNEES POLAIRES

Coordonnées Cartésiennes $\{x, y\}$
Calculs usuels faciles

Coordonnées Polaires $\{r, \phi\}$
Problèmes à symétrie centrale



$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ r > 0 \\ -\pi \leq \varphi < \pi \end{cases}$$



$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

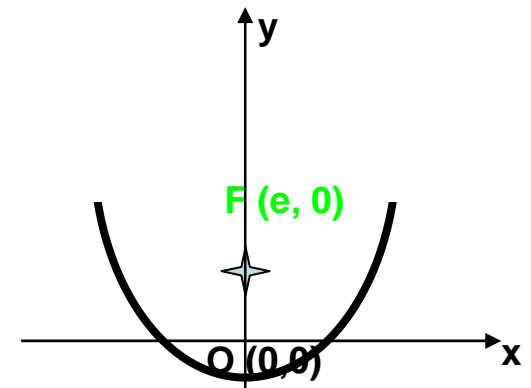
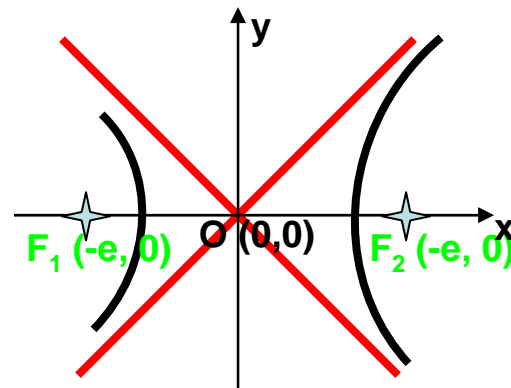
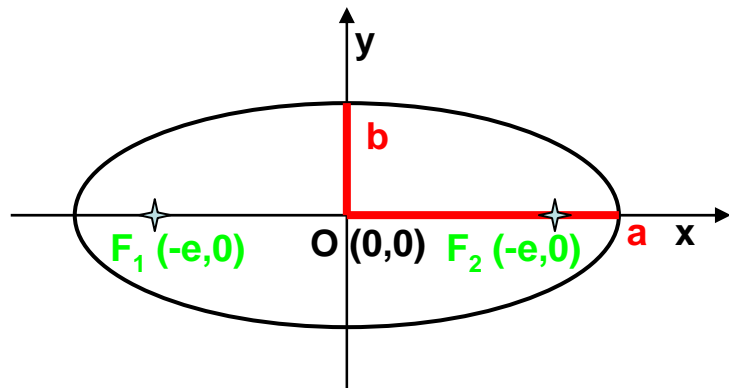


ATTENTION : Angle orienté !!!

I.c) FONCTIONS POLYNOMIALES ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

•Géométrie analytique dans le plan cartésien (Equations canoniques):

COURBE	Coordonnées cartésiennes	Propriétés
Droite	$ax + by + c = 0$	pente : $-b/a$ ordonnée à l'origine : $-c/b$ $a=0$: horizontale, $b=0$: verticale, $c=0$: affine
Ellipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Longueur des axes principaux //x et //y : a,b Excentricité linéaire : $e = \sqrt{ a^2 - b^2 }$ Coordonnées des 2 points focaux : $(\pm e, 0)$
Hyperbole	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	2 Asymptotes : $y = -\frac{b}{a}x$ $y = +\frac{b}{a}x$ Excentricité linéaire : $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ Coordonnées des 2 points focaux : $(\pm e, 0)$
Parabole	$2px - y^2 = 0$ $p > 0$	Excentricité linéaire : $e = \frac{p}{2}$ Coordonnées du point focal : $(+e, 0)$



Ellipse : Représentation graphique du mouvement des planètes (satellisation)

I.c) FONCTIONS DE 3 VARIABLES

•VARIABLES CONJUGUEES / SEPARÉES

•TYPES USUELS DE COORDONNEES

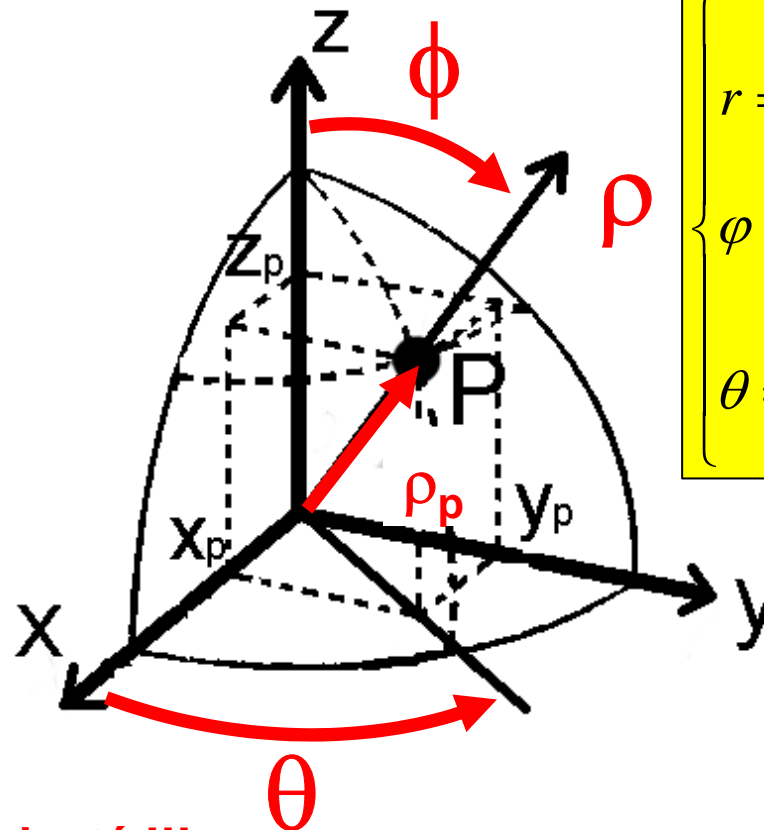


Coordonnées Cartésiennes

Coordonnées Sphériques

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \theta \end{cases}$$

$\rho > 0$
 $-\pi \leq \varphi < \pi$
 $0 \leq \theta < \pi$



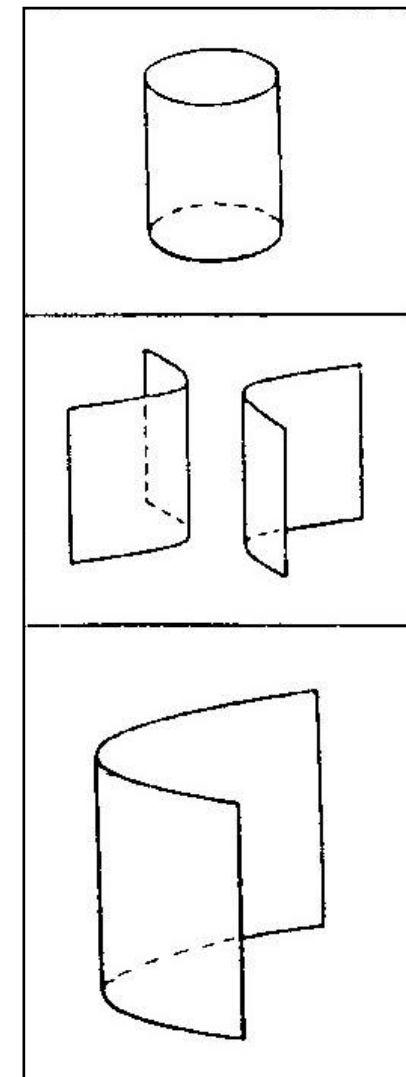
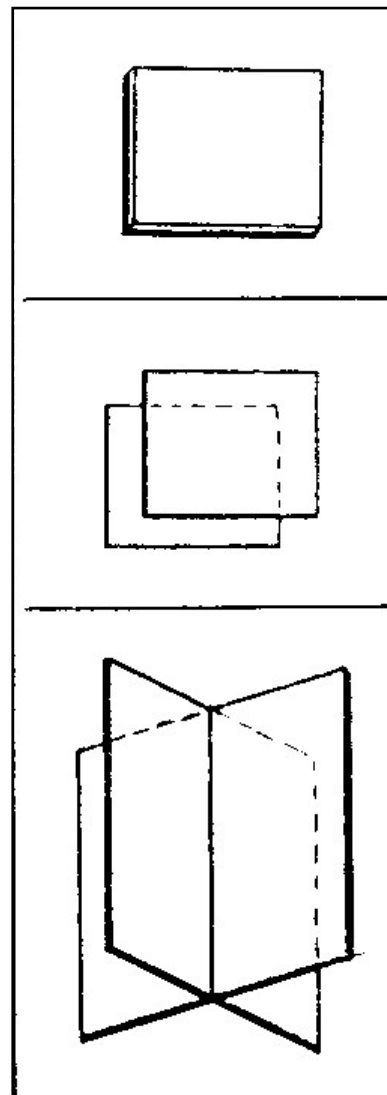
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

ATTENTION : Angle orienté !!!

I.c) FONCTIONS POLYNOMIALES ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

•Géométrie analytique dans l'espace cartésien (Equations canoniques):

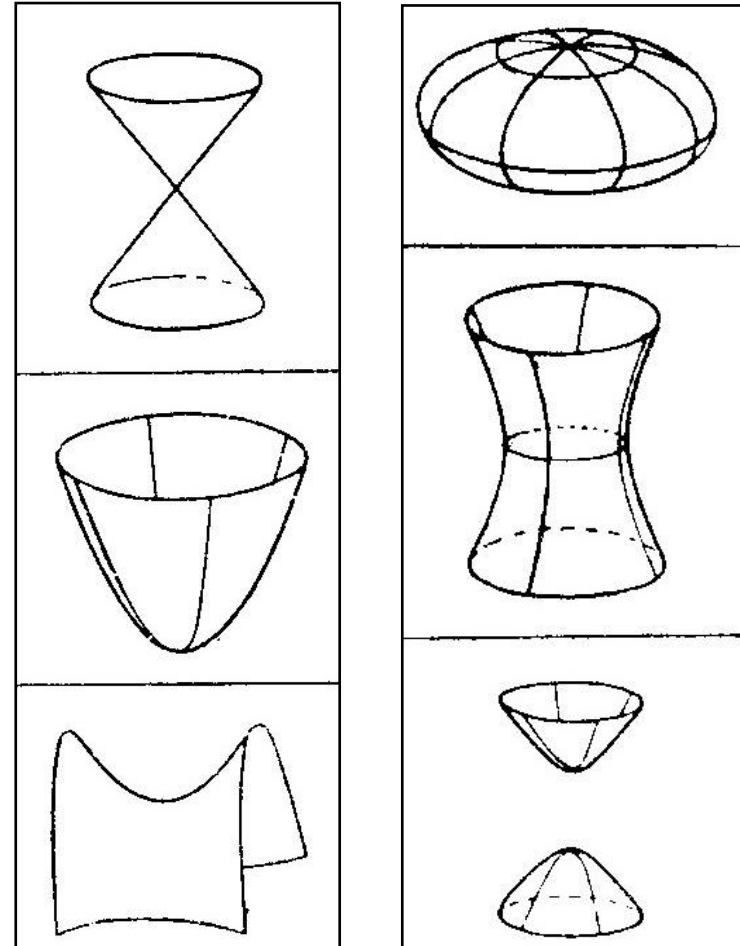
SURFACE ($a, b > 0$)	Coordonnées cartésiennes
Plan	$x = 0$
2 Plans //	$\frac{x^2}{a^2} = 1$
2 Plans sécants	$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 0$
Cylindre elliptique	$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$
Cylindre hyperbolique	$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 1$
Cylindre parabolique	$y^2 = 2px$



I.c) FONCTIONS POLYNOMIALES ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

•Géométrie analytique dans l'espace cartésien (Equations canoniques):

SURFACE ($a, b, c > 0$)	Coordonnées cartésiennes
Cône du second degré	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$
Hyperboloïde à 1 nappe	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
Hyperboloïde à 2 nappes	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$
Ellipsoïde	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
Paraboloïde elliptique	$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$
Paraboloïde hyperbolique	$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}$



Ellipsoïde :

Représentation graphique des tenseurs

(indice de réfraction (optique), contraintes et déformation (mécanique), ...)

I.d) FONCTIONS COMPLEXES

Définition du nombre complexe z :

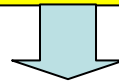
$$z = x + iy \quad \text{avec} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (\text{coordonnées cartésiennes})$$

$$x = \operatorname{Re}(z) : \text{partie réelle} \quad y = \operatorname{Im}(z) : \text{partie imaginaire}$$

Formule de Moivre :

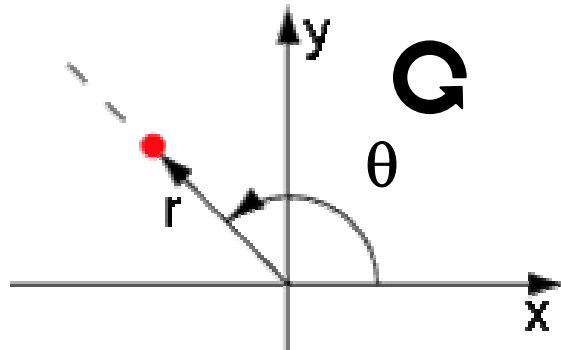
$$z = r \cos \theta + i r \sin \theta \quad (\text{coordonnées polaires})$$

$$i^2 = -1$$



1 nombre complexe z \rightarrow ~ 1 paire de 2 nombres réels $(x,y)/(r,\theta)$
 \rightarrow 1 fonction de 2 variables indépendantes $(x,y)/(r,\theta)$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ r > 0 \end{cases}$$



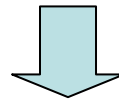
Représentation graphique
ATTENTION A θ !!!

I.d) FONCTIONS COMPLEXES

Propriétés des nombres complexes z et de leur ensemble Z :

- Z n'est pas un ensemble ordonné ($z_1 > z_2$ n'a pas de sens) !!!
- La distance d entre 2 complexes z_1 et z_2 se calcule comme la distance entre les 2 points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans le plan cartésien (métrique $i_x = i_y = 1$)

$$d = \sqrt{\left((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \right)}$$



→ Convergence des suites de complexes (cf. « Séries et Suites »)

Définition simple de la fonction complexe « e^z »

$$e^z = e^{(x+iy)} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Cumule les applications des fonctions e^x et $\sin(x)/\cos(x)$:

- **Propagation et absorption des ondes**
- **Transfert de chaleur, Matière (impédance « généralisée »)**

→ Définition des autres fonctions de base (intérêt limité en Sc. de la Terre)

MODULE LSM.3.053

“Mathématiques appliquées aux Sciences de la Terre 1 »

I Fonctions élémentaires

- a) Fonctions réelles à 1 variable – Rappels généraux**
- b) Fonctions réelles à 2, 3 variables – Coordonnées polaires et sphériques**
- c) Fonctions polynomiales et géométrie cartésienne**
- d) Fonctions complexes**

II Suites et Séries : Mathématiques numériques

- a) Suites**
- b) Séries Σ – Développement en séries de puissances et séries de Fourier**
- c) Séries Π - Exemples**

III Intégration

- a) Primitives et intégrales de fonctions réelles à 1 variable – Rappels généraux**
- b) Primitives remarquables : méthode de calcul analytique**
- c) Evaluation numérique des primitives**
- d) Exemples**

IV Equations différentielles

- a) Dérivée de fonctions usuelles à 1 variable – Rappels généraux**
- b) Dérivées partielles (coordonnées cartésiennes, polaire, sphériques)**
- c) Equation différentielle de 1^{er} ordre - Exemples**
- d) Equation différentielle de 2^{ème} ordre**
- e) Système d'équations différentielles**

II.a) SUITES DE REELS

Suite : Séquence de termes a_j , indexés par leur numéro d'ordre entier j

La suite est définie par

l'expression générique du $j^{\text{ème}}$ terme en fonction de j : $a_j = f(j)$

$$\text{Exemples: } a_j = x^j, \quad a_j = \frac{x^j}{j!}, \quad a_j = (-1)^j \frac{x^j}{j!}$$

ou bien { la valeur d'un terme a_j (eg. a_0 , premiers termes)
une expression de récurrence entre termes consécutifs

$$\text{Factorielle: } a_j = j! \rightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_j = j * a_{j-1} \end{cases}$$
$$\text{Fibonacci: } \phi = \lim_{j \rightarrow \infty} a_j \rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_j = a_{j-1} + a_{j-2} \end{cases}$$

Convergence :

$$\text{Cauchy: } \forall \varepsilon > 0, \forall (m, n) > n_0(\varepsilon) \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tq. } |a_m - a_n| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_{n-1}) \rightarrow 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \rightarrow a, \quad a \in \mathbb{R}$$

Limite de convergence :

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (\text{on } a : a_n = a_{n+1})$$

II.a) SUITES DE REELS : EXERCICES

EXERCICE : Etudier la convergence des suites suivantes :

$$a_j = x^j, \quad a_j = \frac{x^j}{j!}, \quad a_j = (-1)^j \frac{x^j}{j!}, \quad \text{Factorielle: } \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_j = j * a_{j-1} \end{cases}$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (a_{j+1} - a_j) \rightarrow 0 \Leftrightarrow a_{j+1} = a_j$$

$$a_j = x^j \quad \text{convergence} \Rightarrow \begin{matrix} a_{j+1} = a_j \\ j \rightarrow \infty \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x^{j+1} = x^j \\ j \rightarrow \infty \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = 0, 1 \\ j \rightarrow \infty \end{matrix}$$

$$a_j = x^j \quad \text{convergence} \Rightarrow \begin{matrix} \frac{x^{j+1}}{(j+1)!} = \frac{x^j}{j!} \\ j \rightarrow \infty \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \frac{x}{j+1} = 1 \\ j \rightarrow \infty \end{matrix} \Leftrightarrow \text{convergence } \forall x$$

$$a_j = (-1)^j \frac{x^j}{j!} \quad \text{convergence} \Rightarrow \begin{matrix} (-1)^{j+1} \frac{x^{j+1}}{(j+1)!} = (-1)^j \frac{x^j}{j!} \\ j \rightarrow \infty \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \frac{-x}{j+1} = 1 \\ j \rightarrow \infty \end{matrix} \Leftrightarrow \text{convergence } \forall x$$

$$\text{Factorielle: } \text{convergence} \Rightarrow \begin{matrix} j * a_j = a_j \\ j \rightarrow \infty \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} j = 1 \\ j \rightarrow \infty \end{matrix} \Leftrightarrow \text{divergence}$$

II.a) SUITES DE REELS : CALCUL DE CONSTANTES FONDAMENTALES

QUELQUES FORMULES UTILES (Voir Informatique):

- Calcul de $\sqrt{2}$
→ convergence rapide

$$n \in \mathbb{N} : \sqrt{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_0 = 2 \\ a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{1}{a_{n-1}} \end{cases}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	racine(2)
an	2	1,500000	1,416667	1,414216	1,414214	1,414214	1,414214	1,414214	1,414214	1,414214	1,414214	1,41421356

- Calcul de la constante d'Euler e :
→ convergence lente

$$n \in \mathbb{N} : e = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{avec} \quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

n	0	1	2	3	4	5	10	50	100	1000	10000	Euler e
a _n	1	2,000000	2,250000	2,370370	2,441406	2,488320	2,593742	2,691588	2,704814	2,716924	2,718146	2,71828183

- Approximation de n! (Formule de Stirling)

$$n \in \mathbb{N} : e = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{avec} \quad a_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

n	0	1	2	3	4	5	10	15	20	50	100
an	1	0,922137	1,919004	5,83621	23,50618	118,0192	3598696	1,3E+12	2,42E+18	3,04E+64	9,3E+157
n!	1	1	2	6	24	120	3628800	1,31E+12	2,43E+18	3,04E+64	9,3E+157

II.a) SUITES DE REELS : CLASSIFICATION ET PROPRIETES

CLASSIFICATION :

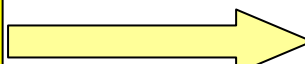
• Suite arithmétique : $n \in N : a_0 = a, a_n = a_{n-1} + q$

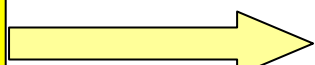
• Suite géométrique : $n \in N : a_0 = a, a_n = a_{n-1} * q$

• Autres (Euler e, n!, $\sqrt{2}$, ...)



OPERATIONS REMARQUABLES :

Sommation : $n \in N : \sum_{j=0}^n a_j = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$  SERIE Σs_n

Produit : $n \in N : \prod_{j=0}^n a_j = a_0 * a_1 * a_2 * \dots * a_n$  SERIE Πp_n

OPERATIONS ELEMENTAIRES EN INFORMATIQUE (+, *) → CALCUL RAPIDE

II.b) SERIES Σ DE REELS

Série Σ : Résultat de la sommation des termes a_j , d'une suite.

La série s_n est définie par
$$s_n = \sum_{j=0}^n a_j = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Convergence : *Condition nécessaire* : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \rightarrow 0$ (soit $s_{n+1} = s_n$)
(série infinie)

Convergence : *Condition nécessaire* : $\sum_{j=0}^n |a_j|$ converge $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \rightarrow 0 \right)$
absolue

Nombre d'or $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$: $\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{j=0}^n a_j$ $\left(a_0 = 1, a_{j+1} = 1 + \frac{1}{a_j} \right)$

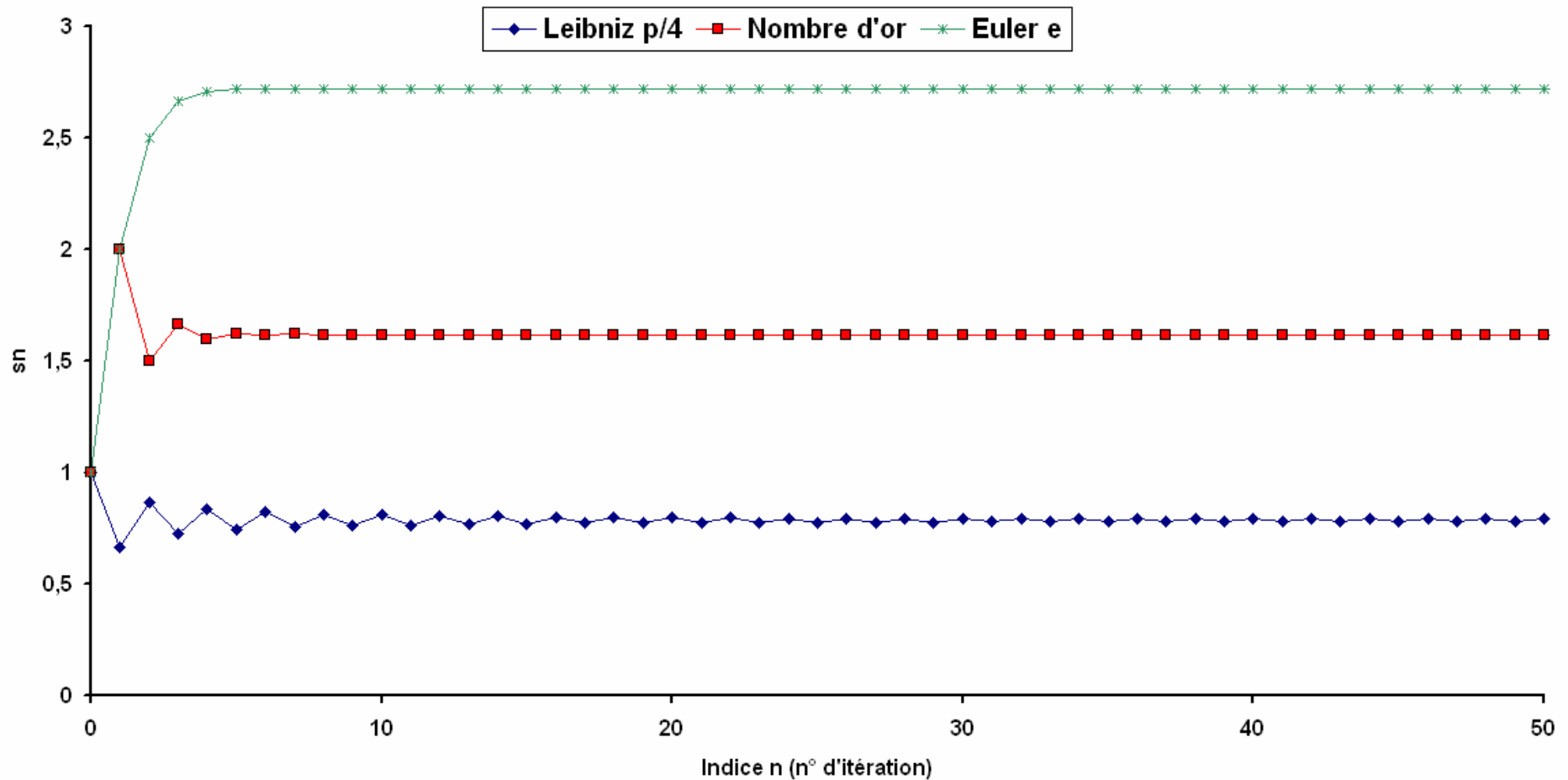
Leibniz : $\frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{1}{2j+1}$ $\left(a_j = (-1)^j \frac{1}{2j+1} \right)$

Euler e : $e = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!}$ $\left(a_j = \frac{1}{j!} \right)$

Exercice : Tester numériquement la convergence des suites de Leibniz, d'Euler et du nombre d'or

II.b) SERIES Σ DE REELS : GRAPHE DE CONVERGENCE

Convergence de quelques suites remarquables



II.b) SERIES Σ DE REELS : CRITERES DE CONVERGENCE

CONVERGENCE DES SÉRIES (A TESTER AVANT CALCUL/PROGRAMMATION):

Critère de comparaison
→ Inutilisable !!!

$$\text{Si } \forall n, |a_j| \leq b_j \text{ et } \sum_{j=0}^{\infty} b_j \text{ converge alors } \sum_{j=0}^{\infty} a_j \text{ converge}$$

Critère du rapport
→ A utiliser !!!

$$\text{Soient } s_n = \sum_{j=0}^n a_j \text{ et } q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

$q < 1 \Rightarrow s_n \text{ converge, } q > 1 \Rightarrow s_n \text{ diverge, } q = 1 \Rightarrow \text{incertitude}$

Critère de la racine
→ A utiliser !!!

$$\text{Soient } s_n = \sum_{j=0}^n a_j \text{ et } q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$q < 1 \Rightarrow s_n \text{ converge absolument, } q > 1 \Rightarrow s_n \text{ diverge, } q = 1 \Rightarrow \text{incertitude}$

Critère de l'intégrale
→ A utiliser !!!

Soit f une fonction positive, continue et décroissante

$$s_n = \sum_{j=1}^n f_j \text{ converge si et seulement si } \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ converge}$$

Exercice : Tester la convergence de $s_n = \sum_{j=0}^{\infty} a_j$ avec $a_j = \frac{x^j}{j!}$, $a_j = jx^j$, $a_j = \frac{1}{j^\alpha}$
et des séries arithmétiques et géométriques.

II.b) SERIES Σ DE REELS : SERIES ARITHMETIQUES ET GEOMETRIQUES

CONVERGENCE DES SÉRIES REMARQUABLES

Séries arithmétiques : $s_n = \sum_{j=0}^n a_j$ avec $a_0 = a, a_j = a_{j-1} + q$ ($q \in \mathbb{R}$)

$$s_n = a + (a + q) + (a + (a + q)) + \dots + (a + nq)$$

$$s_n = \frac{n+1}{2} (a + (a + nq))$$



Séries géométriques : $s_n = \sum_{j=0}^n a_j$ avec $a_0 = a, a_j = a_{j-1} * q$ ($q \in \mathbb{R}$)

$$s_n = a + (a * q) + ((a * q) * q) + \dots + (a * q^n)$$

$$s_n = a \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$q \leq 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = a, \quad q > 1 \Rightarrow \text{divergence}$$

Cas particulier : "série de puissances"



II.b) SERIES Σ DE REELS : SERIES DE PUISSANCE

SERIES DE PUISSANCES – Développement de Taylor

On appelle "série de puissance centrée en z_0 " une série: $f(z) = \sum_{j=0}^n a_j (z - z_0)^j$

avec a_j, z_0 : nombres fixes, z : variable



"Rayon de convergence" r de la série de puissances: $r = \frac{1}{\rho}$ avec $\rho = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \right|$
 $r = 0 \Rightarrow$ Convergence en z_0 , sin on, convergence au sein du disque de rayon r autour de z_0



CAS PARTICULIER : Série de Taylor

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f^{(j)}(z_0) \frac{(z - z_0)^j}{j!} \quad f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j \quad \text{avec} \quad a_j = \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}$$

**TRES
IMPORTANT**

PROPRIETES REMARQUABLES

A l'intérieur du domaine de convergence, les séries de puissances peuvent être additionnées, multipliées, différenciées terme à terme, intégrées et les termes peuvent être permutés.

INTERET :

- Intégration de fonctions non « standard »
- Résolution d'équations différentielles
- Approximations de fonctions (accélération de programmes)

II.b) SERIES Σ DE REELS : SERIES DE PUISSANCES IMPORTANTES

Fonction	Série de puissances	Rayon
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$	$ x < 1$
$\frac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k$	$ x < 1$
$(a+x)^n \quad n \in \mathbb{N}^*$	$a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} x + \binom{n}{2} a^{n-2} x^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} x^3 + \dots$	$ x < +\infty$
$(a+x)^{-n} \quad n \in \mathbb{N}^*$	$a^{-n} - n a^{-n-1} x + n(n+1) a^{-n-2} x^2 - \dots = a^{-n} + \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{n+1}{k} (-1)^k x^k$	$ x < +\infty$
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$	$ x < +\infty$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$	$ x < 1$
$\ln(1-x)$	$-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$	$ x < 1$

Exercice : Série de puissance de la fonction $\sin(x)$.

Calcul de son rayon de convergence, Calcul des n=4 premiers termes.

Représentation graphique de $f(x)$ et sa série lorsqu'on ajoute des termes.

Estimation de la dérivée de $f(x)$ et de sa primitive.

II.b) SERIES Σ DE REELS : SERIES DE FOURIER

SERIES DE FOURIER (Traitement du signal, Diffraction, Statistiques, ...)

On appelle "série de Fourier associée à $f(t)$, fonction périodique de période T "

la série : $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=0}^n a_j \cos(j\omega t) + b_j \sin(j\omega t)$ ou $f(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{j=0}^n c_j e^{i(j\omega t)}$



avec : $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $a_j = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(j\omega t) dt$, $b_j = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(j\omega t) dt$, $c_j = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{i(j\omega t)} dt = a_j + b_j$

Convergence (Critère de Dirichlet):

- Si
- * la fonction a 1 période $T > 0$ (y compris T infinie : Fonction non périodique)
 - * La fonction est continue par morceaux sur tout $[-T/2, T/2[$
 - * Les discontinuités sont finies sur tout $[-T/2, T/2[$

alors la série de Fourier converge.

Propriété :

Fonction paire : uniquement les termes en $\cos(jx) = \cos(j\omega t)$

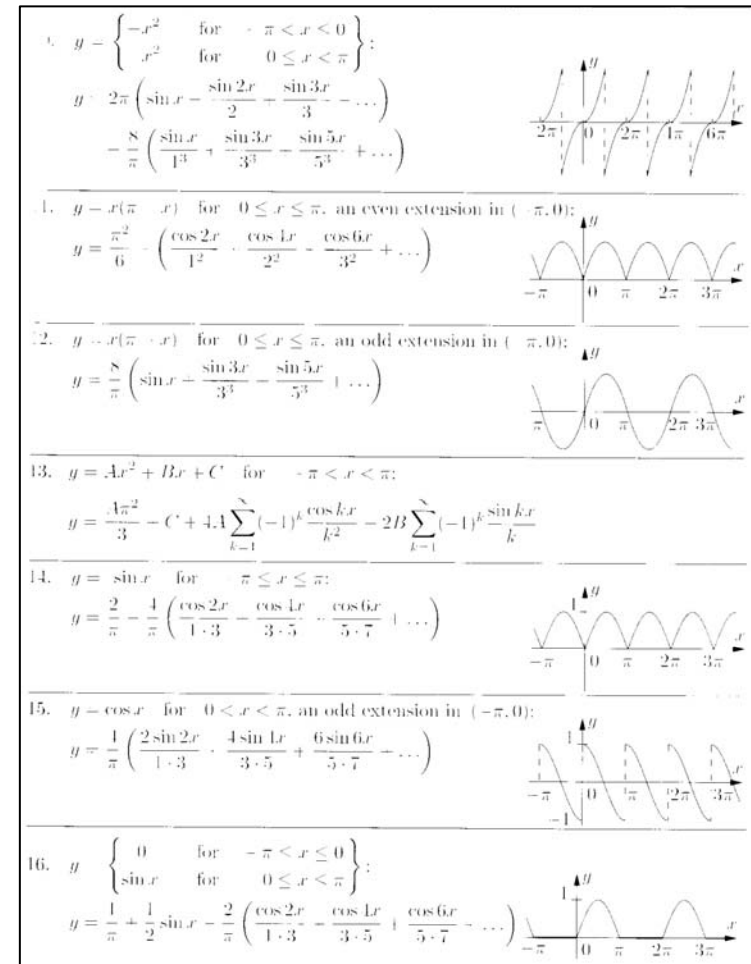
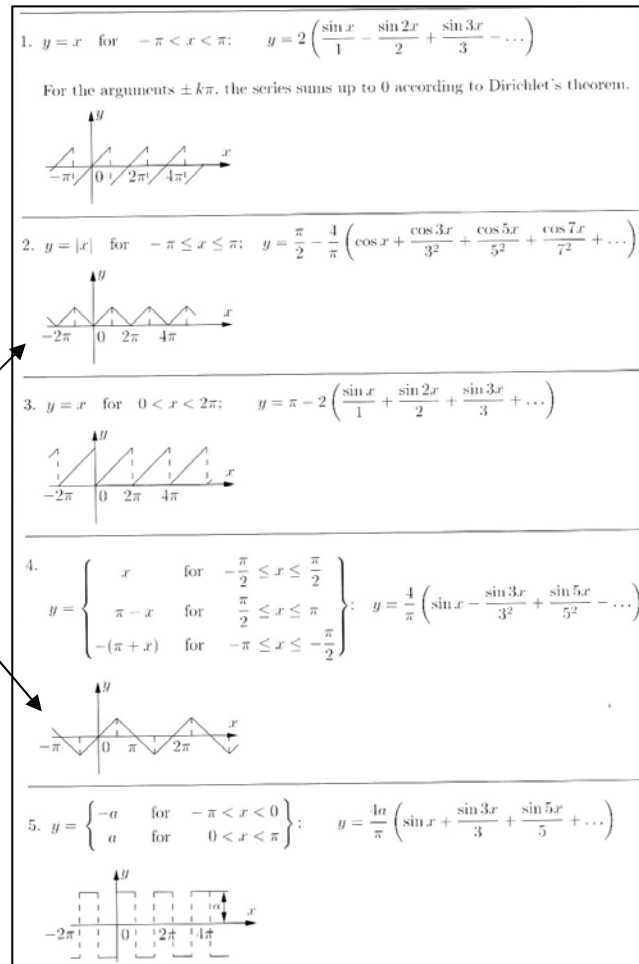
Fonction impaire : uniquement les termes en $\sin(jx) = \sin(j\omega t)$

APPLICATIONS: Résolution d'équations différentielles (Eq. de Fourier !)
Filtrage de bruit (Traitement du signal)
Analyse spectrale (Statistique)

II.b) SERIES Σ DE REELS : SERIES DE FOURIER

SERIES DE FOURIER IMPORTANTES

Effet de parité
(déphasage)



Exercice : Série de Fourier de la fonction triangle :

$$f(x) = -x \text{ pour } -1 < x \leq 0,$$

$$f(x) = x \text{ pour } 0 < x \leq 1,$$

Période $T=2$.

Calcul de son rayon de convergence, Calcul des $n=4$ premiers termes non nuls.

Représentation graphique de $f(x)$ et sa série lorsqu'on ajoute des termes.

II.c) SERIES Π DE REELS : DEFINITION

Série Π : Résultat de la sommation des termes a_j , d'une suite.

La série p_n est définie par

$$p_n = \prod_{j=0}^n a_j = a_0 * a_1 * a_2 * \dots * a_n$$

Convergence : *Condition nécessaire* : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \rightarrow 1$ (soit $p_{n+1} = p_n$)
(série infinie)

Convergence : *Condition nécessaire* : $\prod_{j=0}^n |a_j|$ converge $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \rightarrow 1 \right)$
absolue

$$\text{Euler } e =: e = \left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{4}{3}\right)^{1/2} \left(\frac{6.8}{5.7}\right)^{1/4} \left(\frac{10.12.14.16}{9.11.13.15}\right)^{1/8} * \dots$$

$$\text{Wallis } \frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \prod_{j=1}^n \frac{(2j)^2}{4j^2 - 1}$$

$$\text{Euler } \pi : \sin(\pi x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \pi x * \prod_{j=0}^n \left(1 - \frac{x^2}{j^2}\right)$$

Exercice : Tester la convergence des suites d'Euler e , Wallis $\pi/2$ et Euler π .
Etablir une relation de récurrence pour la série Π d'Euler e

II.c) SERIES Π DE REELS : APPLICATIONS

Application des séries Π :

Calculs itératif de valeurs de fonctions complexes (Fonction Γ d'Euler, ...)

Intérêt limité pour les Sciences de la Terre (pour l'instant ...)
sauf pour se faire la main en Informatique !