

# LSM 3.053

## Projet d'Informatique

### Décomposition en série de Fourier

*La décomposition d'une fonction en série de Fourier se rencontre dans de nombreux domaines scientifiques : électronique (filtrage/multiplexage), thermodynamique (transfert de la chaleur), cristallographie (diffraction), statistique (décomposition spectrale, moments) ...*

D'un point de vue théorique, la décomposition en série de Fourier  $\{C_k\}$  est analogue à la transformée de Fourier  $F(k)$  d'une fonction  $f(x)$  mais est essentiellement discontinue. Elle s'applique en particulier au traitement de données numériques pour lesquels la variable  $x$  n'est plus continue mais prend  $n$  valeurs discrètes  $x_j$ . Le terme intégral servant à calculer les coefficients  $C_k$  est alors remplacé par une sommation sur  $j$  :

$$C_k = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} f(x) e^{-i k \frac{2\pi}{L} x} dx \quad \Rightarrow \quad C_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(x_j) e^{-i k \frac{2\pi}{n} x_j}$$

soit, en décomposant en termes réel  $A_k$  et imaginaire  $B_k$  :

$$C_k = A_k + iB_k \text{ avec } A_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(x_j) \cos\left(\frac{2\pi k}{n} x\right) \text{ et } B_k = -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(x_j) \sin\left(\frac{2\pi k}{n} x\right)$$

La décomposition en série de Fourier est possible sur des fonctions  $f(x)$  non périodiques (*i.e.* dont la période  $L$  tend vers l'infini), mais alors il faut prendre garde à considérer suffisamment de termes  $n_k$  dans la décomposition, sous peine d'observer des "effets de terminaison de série".

La fonction recomposée s'écrit alors :

$$f^{rec}(x) = \sum_{k=-nk/2}^{nk/2} C_k e^{i \frac{2\pi k}{n} x} = \frac{1}{nk} \sum_{j=1}^n x_j + \sum_{k=-nk/2}^{nk/2} f_k^{reel} + f_k^{im} \quad \text{soit}$$

$$f_k^{reel} = \sum_{k=1}^{nk} A_k \cos\left(\frac{2\pi k}{n} x\right) - B_k \sin\left(\frac{2\pi k}{n} x\right) \quad f_k^{im} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{nk} B_k \cos\left(\frac{2\pi k}{n} x\right) - A_k \sin\left(\frac{2\pi k}{n} x\right)$$

### REALISATION DU PROJET :

#### Test : Programmation de la décomposition puis recomposition de Fourier d'une fonction connue

- 1) Inscrivez en colonnes A et B les valeurs  $x$  et  $f(x)$  d'une fonction dont vous connaissez la décomposition de Fourier (fonction créneau par exemple).
- 2) Demandez auprès d'un utilisateur le nombre  $nk$  de termes dans la décomposition de Fourier.
- 3) Calculez les  $2*nk$  coefficients de Fourier  $A_k$  et  $B_k$  et affichez-les en colonnes D et E.
- 4) Calculez en colonne F et G les composantes réelles  $f_k^{reel}$  et imaginaires  $f_k^{im}$  de la recomposition de Fourier de  $f(x)$
- 5) Comparez graphiquement  $f(x)$  et  $[f_k^{reel}(x) + f_k^{im}(x)]$  et vérifiez que le résultat obtenu est cohérent.
- 6) Observez l'apparition de terminaisons de série lorsque le nombre de terme  $nk$  de la décomposition devient insuffisant.

## Transformée de Fourier d'une courbe tabulée

### Identification du format du fichier

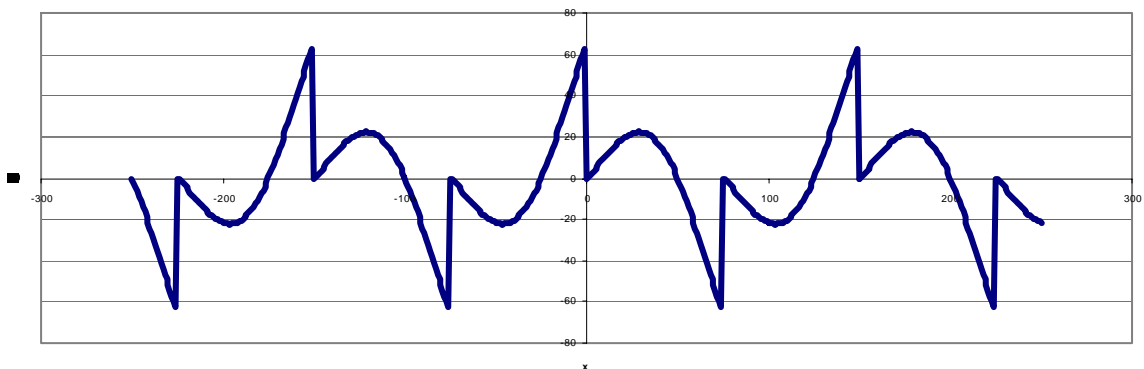
- 1) Copiez dans votre répertoire le fichier "mystere.txt".
- 2) Ouvrez le fichier avec un éditeur de texte et analysez sa structure afin de pouvoir l'importer convenablement à partir d'une macro.

### Programmation de la décomposition de Fourier 1D:

- 1) Lecture des données  $A_k$  et  $B_k$  directement à partir du fichier mystere.txt et inscription dans les colonnes A et B.
- 2) Calcul en colonne Det E des composantes réelles  $f^{reel}$  et imaginaires  $f^{im}$  de la recombinaison de Fourier de  $f(x)$
- 3) Affichage de  $f^{rec}(x) = [f^{reel}(x) + f^{im}(x)]$  sur un graphique.

**Remarque : la fonction  $f(x)$  à reconstruire est REELLE  $\Rightarrow f^{im}(x) \sim 0$**

mystere



### Exercice supplémentaire (pour les fans) Programmation d'une décomposition de Fourier 2D:

- 1) Lecture des données  $A_{kl}$  et  $B_{kl}$  directement à partir d'un fichier mystere\_2D.txt où les valeurs de  $A_{kl}$  et  $B_{kl}$  sont stockées en colonnes comme dans mystere.txt. Inscription dans les colonnes à partir de A des paires de valeurs  $(A_{kl}; B_{kl})$ .
- 2) Calcul dans les colonnes suivantes des composantes réelles  $f^{reel}(x,y)$  et imaginaires  $f^{im}(x,y)$  de la recombinaison de Fourier de  $f(x,y)$
- 3) Conversion des données en image "noir et blanc" : on associe à chaque valeur  $f^{rec}(x,y) = [f^{reel}(x,y) + f^{im}(x,y)]$  une valeur  $C(x,y)$  telle que :  
$$C(x,y) = 1 \text{ si } \|f^{reel}(x,y) + f^{im}(x,y)\| > \text{seuil}$$
$$C(x,y) = 0 \text{ si } \|f^{reel}(x,y) + f^{im}(x,y)\| \leq \text{seuil}$$
- 4) Affichage de  $C(x,y)$  sur un graphe.

## Rédaction du rapport :

*Indiquez dans une notice explicative la fonction des différentes fonctions/macros que vous avez introduites ainsi que la démarche que vous avez employée pour réaliser les calculs demandés.*

## IMPORTANT :

*Vous pouvez trouver de la documentation utile en recherchant les méthodes de "transformée de Fourier rapide" (FFT).*